LÍMITES

Problema 22:

Calcula:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$$

Razona cómo se obtiene.

Solución problema 22:

Comprobamos que es una indeterminación, sustituyendo el valor de x por infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \sqrt{1+\infty}-\sqrt{\infty} = \sqrt{\infty}-\sqrt{\infty} = \infty-\infty$$

Al ser una indeterminación del tipo: $\infty-\infty$

Multiplicaremos numerador y denominador por su conjugado:

$$Conjugado\ de\ \sqrt{1+x}-\sqrt{x}\ es\ igual\ a\ \sqrt{1+x}+\sqrt{x}$$

Por tanto, quedará:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right)$$

En el numerador, se obtiene una identidad notable. Diferencia por suma igual a diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x}^{2})-(\sqrt{x}^{2})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cancel{x}-\cancel{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

La mayor potencia que tenemos es:

$\sqrt{x}$

Dividimos numerador y denominador por ella, y operamos:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\infty}}}{\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}+\sqrt{1}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}+\sqrt{1}}=\frac{0}{\sqrt{0+1}+\sqrt{1}}=$$

$$=\frac{0}{\sqrt{0+1}+\sqrt{1}}=\frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$