<u>LÍMITES</u>

<u>Problema 21</u>:

a).-Calcular:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$

b).- Si r es el número inverso del límite anterior, calcular *a* de modo que sea incompatible el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ax-6y=5a-3$$

$$rx+(a-7)y=-7a+29$$

<u>Solución problema 21:</u>

a).-Comprobamos que es una indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \sqrt{\infty^2+\infty+1}-\infty = \sqrt{\infty^2}-\infty = \infty-\infty$$

Multiplicamos por su conjugado:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{x}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

b).- r es el número inverso del límite anterior:

$r = 2$

Sustituimos su valor en el sistema de ecuaciones:

$ax - 6y = 5a - 3$

$2x + (a-7)y = -7a + 29$

Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss, colocando solo los coeficientes:

$$\begin{array}{ccl l} a & -6 & \vdots\ 5a-3 & EC1 \\ 2 & a-7 & \vdots\ -7a+29 & EC2 \end{array}$$

Haremos cero el coeficiente que ocupa la posición a_{21}, de manera que la nueva ecuación 2 (EC") será:

$EC2 = aEC2 - 2EC1$

Así:

aEC2= 2a a(a-7) a(-7a+29)

menos (-)

2EC1= 2a -12 10a-6

Nueva EC2= aEC2-2EC1

NEC2= 0 a(a-7)+12 a(-7a+29)-10a+6

$$\begin{array}{ccc|cc} a & -6 & \vdots & 5a-3 & EC1 \\ 0 & a(a-7)+12 & \vdots & a(-7a+29)-10a+6 & EC2 \end{array}$$

Simplificando:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & -6 & \vdots & 5a-3 & EC1 \\ 0 & a^2-7a+12 & \vdots & -7a^2+19a+6 & EC2 \end{array}$$

De manera que, una vez a_{21}= 0, tenemos para que el sistema sea incompatible

$a_{22} \neq a_{23}$

Luego, hallamos el valor de a en cada caso:

$a(a-7)+12 \neq a(-7a+29)-10a+6$

Por una parte hacemos a_{22}= 0

$a(a-7)+12 = 0$

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$a = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$a_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$a_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Por otra parte hacemos a_{23}= 0

$$a(-7a + 29) - 10a + 6 = 0$$

$$-7a^2 + 29a - 10a + 6 = 0$$

$$-7a^2 + 19a + 6 = 0$$

$$7a^2 - 19a - 6 = 0$$

$$a = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-6)}}{2 \cdot 7} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 168}}{14} = \frac{19 \pm \sqrt{529}}{14} = \frac{19 \pm 23}{14}$$

$$a_1 = \frac{19+23}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$a_2 = \frac{19-23}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Por tanto, al ser *a*= *3* la única solución común a ambas ecuaciones significa que para cualquier valor de *a* distinto de 3, el sistema es incompatible.