LÍMITES

Problema 20:

Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+2a+3a+\cdots+na}{(n+a)^2}$$

Solución problema 20:

Comprobamos que es una indeterminación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+2a+3a+\cdots+na}{(n+a)^2} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

El numerador es una progresión aritmética:

a_1= a

a_n= na

d= a

Por tanto, hallamos su suma:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$$

Sustituyendo:

$$S_n = \frac{a+na}{2}\cdot n = \frac{na+n^2a}{2}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+2a+3a+\cdots+na}{(n+a)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{na+n^2a}{2}}{(n+a)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na+n^2a}{2(n+a)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2a+na}{2(n+a)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2a+na}{2(n^2+a^2+2an)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2a+na}{2n^2+2a^2+4an} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2a}{n^2}+\frac{na}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{4an}{n^2}+\frac{2a^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{a}{n}}{2+\frac{4a}{n}+\frac{2a^2}{n^2}} = \frac{a+\frac{a}{\infty}}{2+\frac{4a}{\infty}+\frac{2a^2}{\infty^2}} = \frac{a+0}{2+0+0} = \boldsymbol{\frac{a}{2}}$$