ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Problema 255:

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}+x}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

Solución Problema 255:

Multiplicamos el 1er término por su conjugado:

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}+x}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

Así, en el numerador queda, suma por diferencia que es igual a diferencia de cuadrados

$$\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{\frac{1}{2}+x})^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

$$\frac{\cancel{x}-\frac{1}{2}\cancel{-x}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{2}+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}}$$

$$\frac{-1}{2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x}{2}}}$$

Elevamos al cuadrado ambos términos:

$$\left(\frac{-1}{2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x}{2}}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1+2x}{2}}$$

$$\frac{1}{4\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)^2}=\frac{2}{1+2x}$$

$$1+2x=8\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)^2 \textit{ este 2º miembro es una identidad notable}$$

$$1+2x=8[(\sqrt{x})^2+\sqrt{\frac{1+2x}{2}}^{\,2}-2\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)]$$

$$1+2x=8[x+\frac{1+2x}{2}-2\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)]$$

$$1+2x=8[\frac{2x+1+2x}{2}-2\left(\sqrt{\frac{x(1+2x)}{2}}\right)]$$

$$1+2x=8[\frac{4x+1}{2}-2\left(\sqrt{\frac{x(1+2x)}{2}}\right)]$$

$$1+2x=\frac{8\cdot(4x+1)}{2}-16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)$$

$$1+2x=4\cdot(4x+1)-16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)$$

$$1+2x=16x+4-16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)$$

$$16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)=16x+4-1-2x$$

$$16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)=14x+3$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$[16\left(\sqrt{\frac{(x+2x^2)}{2}}\right)]^2 = (14x+3)^2$$

$$256\cdot\frac{(x+2x^2)}{2} = 196x^2+9+84x$$

$$128\cdot(2x^2+x) = 196x^2+9+84x$$

$$265x^2+128x = 196x^2+9+84x$$

$$265x^2-196x^2+128x-84x-9=0$$

$$60x^2+44x-9=0$$

$$x=\frac{-44\pm\sqrt{44^2-4\cdot 60\cdot(-9)}}{2\cdot 60}=\frac{-44\pm\sqrt{1936+2160}}{120}=\frac{-44\pm\sqrt{4096}}{120}=\frac{-44\pm 64}{120}$$

$$x_1=\frac{-44+64}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}\ \textit{solución válida}$$

$$x_2=\frac{-44-64}{120}=\frac{-108}{120}=\frac{-9}{10}\ \textit{solución no válida}$$