PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 68:

Al cortar una pirámide regular hexagonal por un plano que pasa por una arista lateral y la altura, se obtiene un triángulo equilátero de lado 3 dm. Calcular el volumen de la pirámide.

Solución Problema 68:

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base por su altura.

$$V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

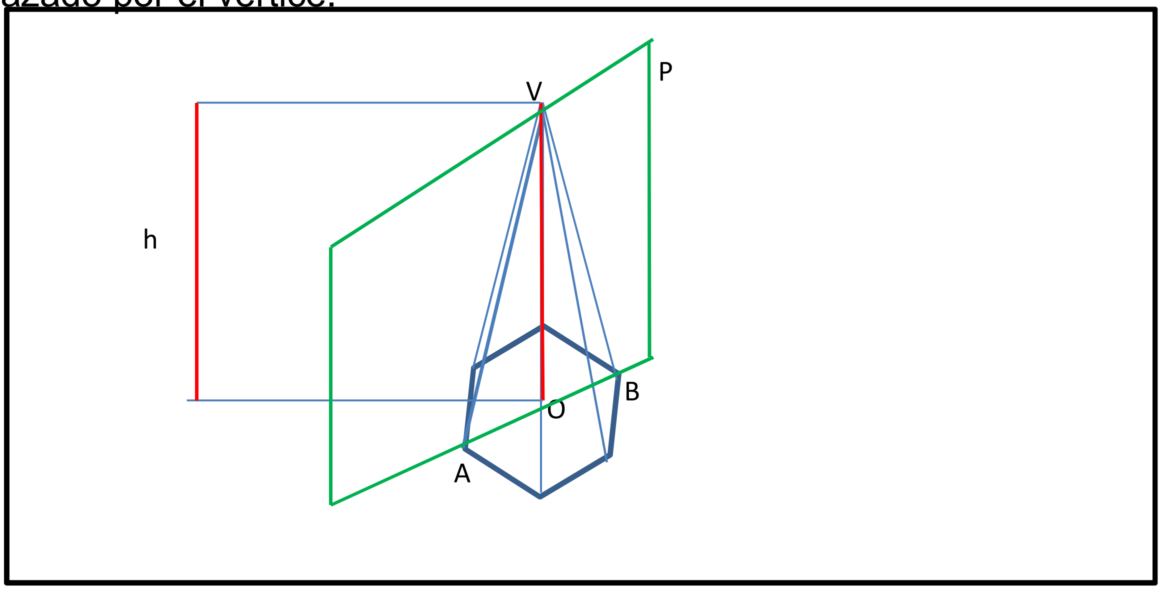
Como aclaración, además, hacemos un croquis aproximado:

La base de la pirámide es un polígono, en nuestro caso, un hexágono.

Las caras laterales son triángulos que tienen con un vértice común.

El número de caras laterales es igual al número de lados del polígono que forma la base. Las aristas laterales son los lados de los triángulos laterales.

Altura de la pirámide es el segmento perpendicular a la base trazado por el vértice.



El plano P, en verde, pasa por la arista lateral AV, de trazo azul más grueso, y la altura h, OV en rojo.

En el enunciado se indica que el triángulo AVB es equilátero, lo que significa que, aunque no se aprecie exactamente en el croquis, sus lados son iguales:

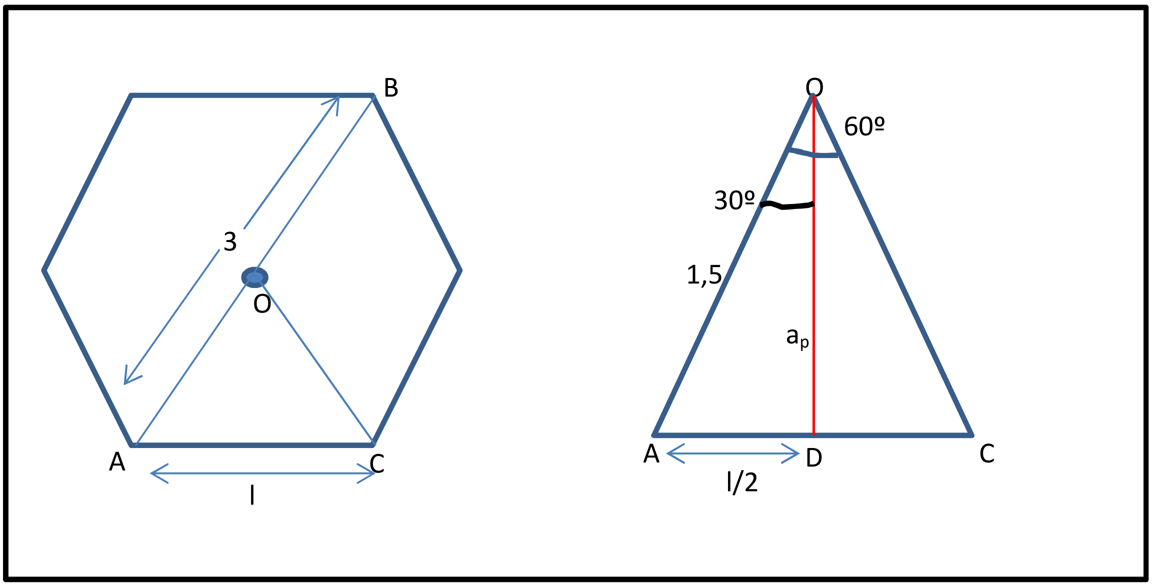
$$AB = AV = VB = 3$$

Calculamos el área de la base del hexágono:

Sabemos que el área de un polígono es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema:

$$A_b = \frac{P \cdot a_p}{2}$$

Para ello, calculamos la apotema, y el lado del hexágono.



Cálculo de la apotema:

La distancia AO es la mitad de la distancia AB, es decir, el radio de la circunferencia circunscrita:

$$AO = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ dm$$

En el triángulo AOD tenemos:

$$cos30º = \frac{a_p}{\frac{3}{2}}$$

$$a_p = \frac{3}{2}\ cos30º = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Cálculo del lado:

$$sen30º = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2l}{3 \cdot 2} = \frac{l}{3}$$

$$l = 3 \cdot sen30º = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Perímetro será:

$$P_b = n \cdot l = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9\ dm$$

Área será:

$$A_b = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{9 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{8}\ dm^2$$

Hallamos la altura:

El triángulo AVB es un triángulo equilátero, luego, la distancia AV es igual a 3 dm.

El triángulo AVO es rectángulo, y la distancia OA es igual a 1,5 dm, y la distancia VO es la altura h.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AVO, tenemos:

$$AV^2 = h^2 + OA^2$$

$$h^2 = AV^2 - OA^2$$

$$h = \sqrt{3^2 - (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

El volumen de la pirámide será:

$$V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V_p = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{27\cancel{\sqrt{3}} \cdot 3\cancel{\sqrt{3}}}{8 \cdot 4 \cdot \cancel{3}} = \frac{27 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{81}{32}\ dm^3$$