PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 67:

Hallar a, b, c y d en:

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Para que la curva pase por los puntos de coordenadas (-1, 2) y (2,3), y para que las tangentes a ella en los puntos de abscisa 1 y -2 sean paralelas al eje de abscisa.

Solución Problema 67:

Como pasa por el punto P (-1, 2), podemos escribir:

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$2 = a + b(-1) + c(-1)^2 + d(-1)^3$

$a - b + c - d = 2 \ \ ecuación\ 1$

Como pasa por el punto Q (2, 3), podemos escribir:

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$3 = a + 2b + c(2)^2 + d(2)^3$

$a + 2b + 4c + 8d = 3\ ecuación\ 2$

Las tangentes a ella en los puntos de abscisa 1 y -2 sean paralelas al eje de abscisa.

Significa que en esos puntos 1 y -2, la 1ª derivada es cero, luego derivamos:

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$y' = b + 2cx + 3dx^2 = 0$

Luego, en x= 1

$b + 2c + 3d = 0 \ \ ecuación\ 3$

Luego, en x= -2

$b - 4c + 12d = 0 \;\; ecuación\ 4$

Por tanto, tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$a - b + c - d = 2 \;\; ecuación\ 1$

$a + 2b + 4c + 8d = 3 \; ecuación\ 2$

$b + 2c + 3d = 0 \;\; ecuación\ 3$

$b - 4c + 12d = 0 \;\; ecuación\ 4$

Resolvemos:

Ecuación 1 la multiplicamos por -1 y la sumamos a la dos:

$-a + b - c + d = -2$

$a + 2b + 4c + 8d = 3$

$3b + 3c + 9d = 1 \; ecuación\ 5$

Ecuación 3 la multiplicamos por -3 y la sumamos a la 5:

$-3b - 6c - 9d = 0$

$3b + 3c + 9d = 1$

$-3c = 1$

$c = \dfrac{-1}{3}$

Sustituyo el valor obtenido de c en las ecuaciones 3 y 4:

$b + 2c + 3d = 0 \;\; ecuación\ 3$

$b - 4c + 12d = 0 \;\; ecuación\ 4$

$b + 2(\dfrac{-1}{3}) + 3d = 0$

$b - 4(\dfrac{-1}{3}) + 12d = 0$

$$b - \frac{2}{3} + 3d = 0$$

$$b + \frac{4}{3} + 12d = 0$$

$$b + 3d = \frac{2}{3};\ \ 3b + 9d = 2\ ecuación\ 6$$

$$b + 12d = -\frac{4}{3}; 3b + 36d = \ -4\ ecuación\ 7$$

Ecuación 6 la multiplicamos por -1 y la sumamos a la 7:

$$-3b - 9d = -2$$

$$3b + 36d = \ -4$$

$$27d = \ -6$$

$$d = \ \frac{-6}{27} = \ \frac{-2}{9}$$

Sustituyo el valor obtenido para d en la ecuación 6:

$$3b + 9d = 2\ ecuación\ 6$$

$$3b + 9(\frac{-2}{9}) = 2$$

$$3b - 2 = 2$$

$$3b = 2 + 2 = 4$$

$$b = \ \frac{4}{3}$$

Sustituimos los valores de b, c y d en la ecuación 1:

$$a - b + c - d = 2\ \ ecuación\ 1$$

$$a - \frac{4}{3} + (\frac{-1}{3}) - (\frac{-2}{9}) = 2$$

$$a - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 2$$

$$a = 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$$

$$a = \frac{18 + 12 + 3 - 2}{9}$$

$$a = \frac{31}{9}$$

Sustituimos los valores de a, b, c y d para obtener la curva:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$y = \frac{31}{9} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3$$