PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 66:

Calcular los coeficientes a, b y c, de modo que la parábola:

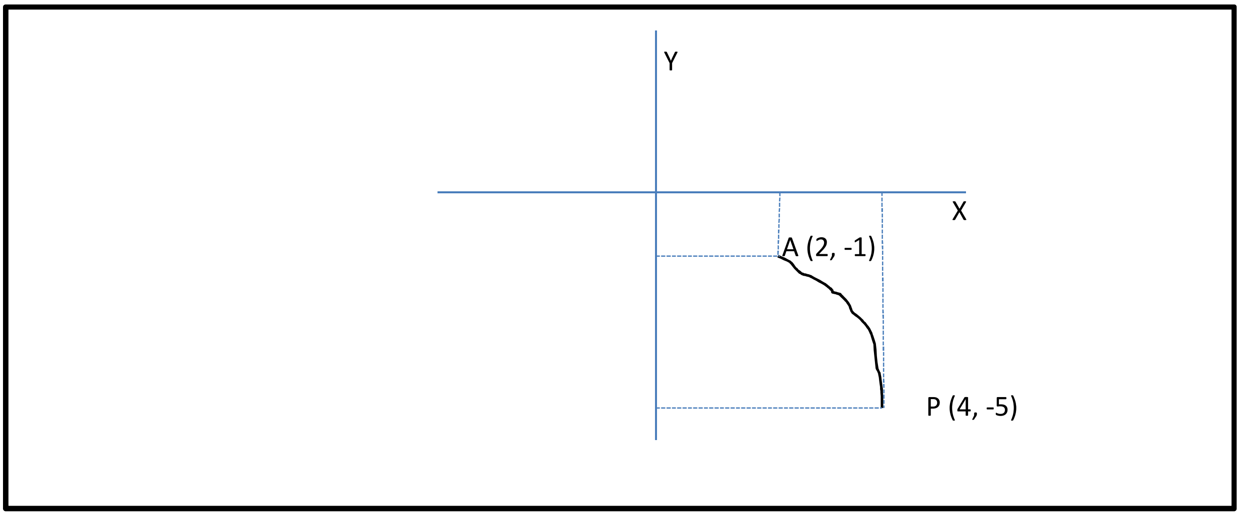
$y = ax^2 + bx + c$

Tenga su vértice en el punto A (2, -1), y pase por el punto P (4,-5).

Dibujar la parábola.

Solución Problema 66:

Hacemos croquis aproximado de la parábola con los dos puntos.



Con estos datos se puede deducir que:

- El coeficiente “a” será <0.
- No cortará al eje X.
- Sus raíces o soluciones son imaginarias: b^2-4ac<0
- El vértice es un máximo.

Como pasa por el punto P (4-5), podemos escribir:

$y = ax^2 + bx + c$

$-5 = a \cdot (4)^2 + b \cdot 4 + c$

$16a + 4b + c = -5 \;\; ecuación\; 1$

Como pasa por el vértice P (2, -1), podemos escribir:

$-1 = a \cdot (2)^2 + b \cdot 2 + c$

$4a + 2b + c = -1 \;\; ecuación\; 2$

Por otra parte, podemos calcular su 1ª derivada, e igualarla a cero (la tangente en el vértice es cero):

$y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$0 = 2ax + b$

Despejamos x:

$2ax = -b$

$$x = \frac{-b}{2a} \; es\; la\; coordenada\; x\; del\; vértice = 2$$

Luego:

$$2 = \frac{-b}{2a}$$

$b = -4a \; ecuación\; 3$

Sustituimos el valor de b en la ecuación 1:

$16a + 4b + c = -5 \;\; ecuación\; 1$

$16a + 4(-4a) + c = -5$

$\cancel{16a} - \cancel{16a} + c = -5$

$c = -5$

Sustituimos el valor de b y c en la ecuación 2:

$4a + 2b + c = -1 \;\; ecuación\; 2$

$$4a + 2(-4a) - 5 = -1$$

$$4a - 8a - 5 = -1$$

$$-4a = -1 + 5$$

$$-4a = 4$$

$$a = \frac{-4}{4} = -1.\ El\ coeficiente\ a < 0$$

Sustituimos el valor de a en la ecuación 3:

$$b = -4a\ ecuación\ 3$$

$$b = -4(-1) = 4$$

Por tanto, la parábola será:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + 4x - 5$$

La dibujamos:

Damos valores a x, e y:

x	0	2	4
y	-5	-1	-5