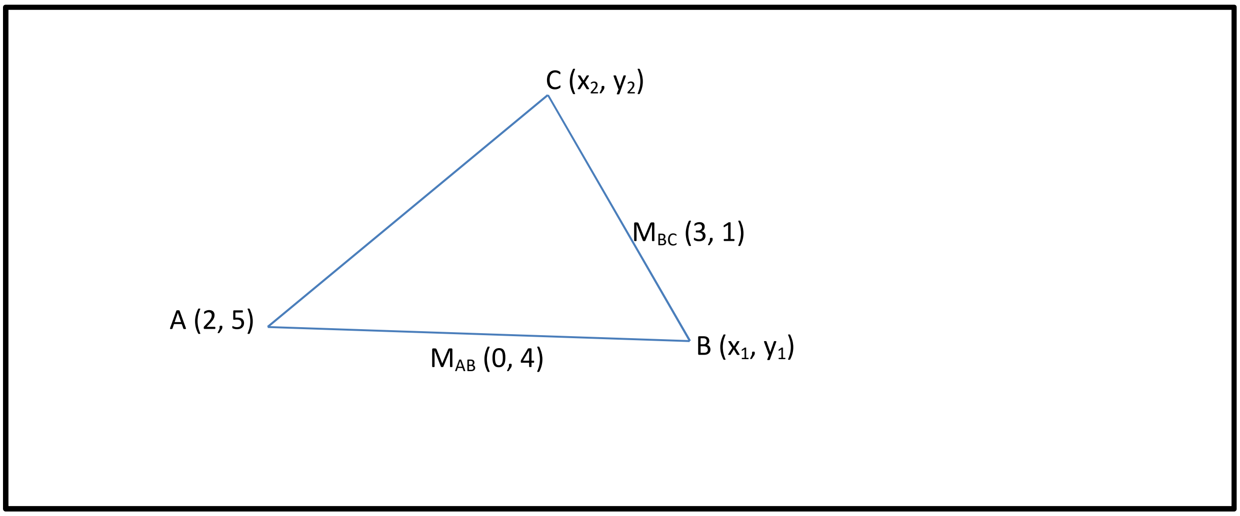
PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 64:

De un triángulo ABC se sabe que A (2, 5), el punto medio de BC es (3, 1), y el punto medio AB es (0, 4). Hallar los otros dos vértices y el área.

Solución Problema 64:

Hacemos croquis aproximado sobre cómo es el triángulo ABC.



Hallamos el punto B, empleando la fórmula del cálculo del punto medio:

Coordenada x_1:

$$x_{MAB} = \frac{2 + x_1}{2}$$

$$0 = \frac{2 + x_1}{2}$$

$$0 = 2 + x_1$$

$$x_1 = -2$$

Coordenada y_1:

$$y_{MAB} = \frac{5 + y_1}{2}$$

$$4 = \frac{5 + y_1}{2}$$

$$8 = 5 + y_1$$

$$y_1 = 8 - 5 = 3$$

Luego, el punto B es:

$$B(-2,3)$$

Hallamos el punto C, empleando la fórmula del cálculo del punto medio:

Coordenada x_2:

$$x_{MBC} = \frac{-2 + x_2}{2}$$

$$3 = \frac{-2 + x_2}{2}$$

$$6 = -2 + x_2$$

$$x_2 = 6 + 2 = 8$$

Coordenada y_2:

$$y_{MBC} = \frac{3 + y_2}{2}$$

$$1 = \frac{3 + y_2}{2}$$

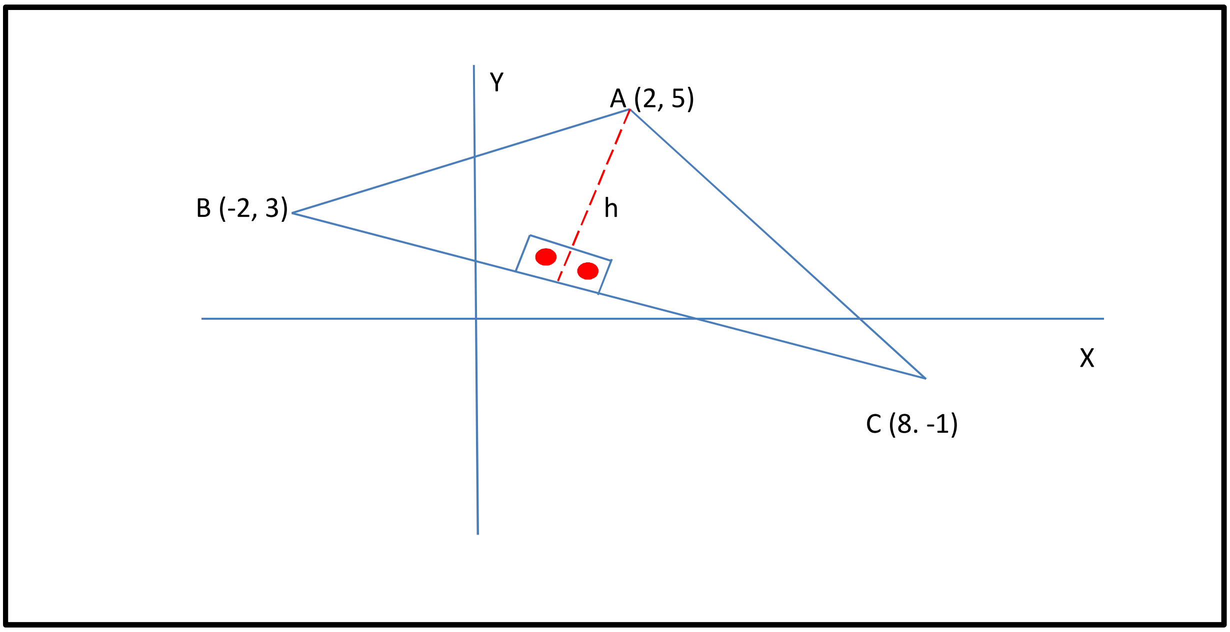
$$2 = 3 + y_2$$

$$y_2 = 2 - 3 = -1$$

Luego, el punto C es:

$$C(8, -1)$$

Ahora dibujamos el triángulo ABC



Calculamos el área del triángulo ABC:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Tomamos como base del triángulo ABC, el segmento BC, de manera que:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (8, -1) - (-2,3) = (10, -4)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10^2 + (-4)^2} = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116}$$

Calculamos la altura h, que es la distancia del punto A a la recta r_{BC}:

1º hallamos la recta r_{BC}, tenemos un punto B(-2, 3) y el vector BC, luego:

$$pendiente\ recta\ m_{rbc} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$$

Ecuación de la recta punto pendiente:

$$y - y_o = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{-2}{5}(x + 2)$$

Operando:

$5y - 15 = -2x - 4$

$2x + 5y - 15 + 4 = 0$

$2x + 5y - 11 = 0$

La longitud de la altura h, la calculamos mediante la distancia de un punto a una recta.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Siendo, en nuestro caso:

$2x + 5y - 11 = 0;\ A = 2; B = 5; C = -11$

$A\ (2, 5); x_1 = \ 2;\ y_1 = 5$

$$h \equiv d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - 11|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{29 - 11}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{18}{\sqrt{29}}$$

$$h \equiv d = \frac{18}{\sqrt{29}}$$

Sustituyendo los valores de b y h en:

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{116} \cdot \frac{18}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{18 \cdot \sqrt{116}}{2 \cdot \sqrt{29}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{116}{29}} = 9 \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2$$

$$A_{ABC} = \ 9 \cdot 2 = 18\, u^2$$