PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 63:

Por el punto P (3, 4) se traza una recta paralela a la y-3x= 0, que corta al eje OX en Q; y otra perpendicular a la y+3x= 0, que corta a OX en R. Hallar el área del triángulo PQR.

Solución Problema 63:

1º Hallamos la recta s_1 paralela a $r_1 \equiv$ y-3x= 0

Pendiente de r_1:

$y = 3x; \quad m_{r1} = 3$

La recta s_1 está definida por un punto y su pendiente

P (3, 4)

Como las rectas: r_1 y s_1 son paralelas:

$luego: m_{s1} = m_{r1} = 3$

Ecuación de la recta punto pendiente:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

En nuestro caso:

$y - 4 = 3(x - 3)$

Operando:

$y - 4 = 3x - 9$

$y = 3x - 9 + 4$

$y = 3x - 5$

$s_1 \equiv y = 3x - 9 + 4$

2º hallamos el punto de corte Q con el eje OX: el punto será de la forma:

Q (x, 0)

Luego:

$y = 3x - 5$

$0 = 3x - 5$

$-3x = -5$

$x = \frac{5}{3}$

$Q\ (\frac{5}{3}, 0)$

3º Hallamos la recta s_2 perpendicular a $r_2 \equiv$ y+3x= 0

Pendiente de r_2:

$y = -3x; \quad m_{r2} = -3$

La recta s_2 está definida por un punto y su pendiente

P (3, 4)

Como las rectas: r_2 y s_2 son perpendiculares:

$luego: m_{s2} = \frac{-1}{m_{r2}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Ecuación de la recta punto pendiente:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

En nuestro caso:

$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 3)$

Operando:

$3y - 12 = x - 3$

$3y = x - 3 + 12$

$3y = x + 9$

$$y = \frac{x}{3} + 3$$

$$s_2 \equiv y = \frac{x}{3} + 3$$

2º hallamos el punto de corte R con el eje OX: el punto será de la forma:

R (x, 0)

Luego:

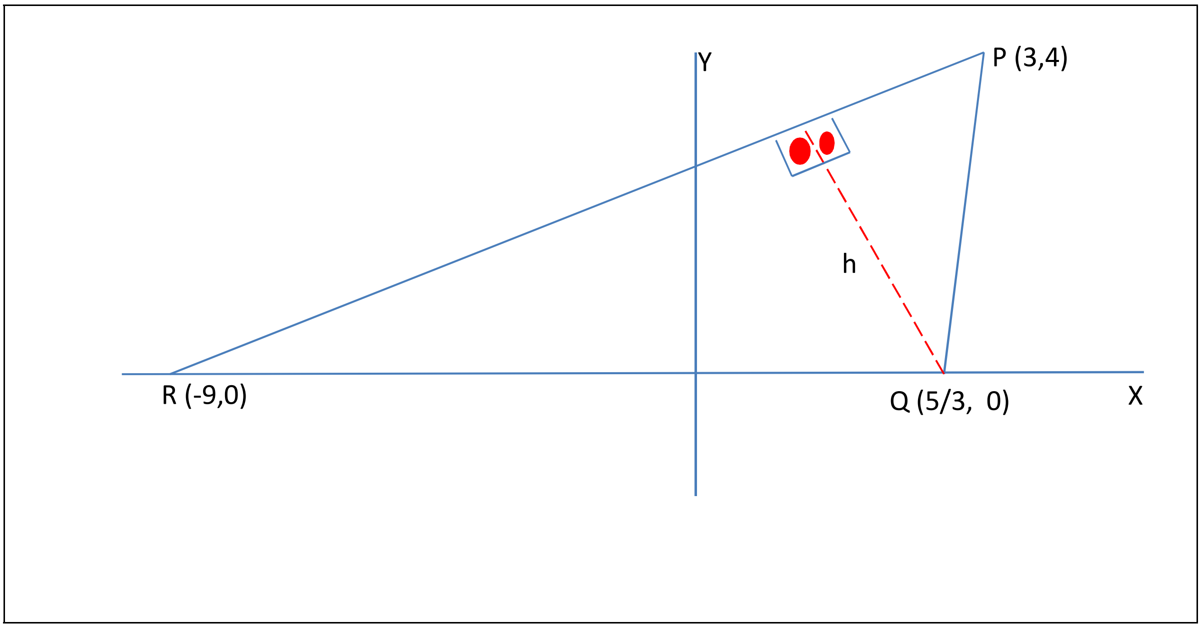
$$y = \frac{x}{3} + 3$$

$$0 = \frac{x}{3} + 3$$

$$x = -9$$

$$R\ (-9, 0)$$

Dibujamos el triángulo resultante:



El área del triángulo PQR será:

$$A_{PQR} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Tomamos como base "b" del triángulo: PQR

1º Hallamos la longitud de la base b:

$$b = \overline{RP} = \overrightarrow{RP} = P - R = (3,4) - (-9,0) = (12,4)$$

$$b = \overrightarrow{|RP|} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

2º Calculamos la longitud de la altura h mediante la distancia de un punto a una recta, en nuestro caso el punto Q (5/3, 0) y la recta r_{rp}.

La recta "r_{rp}" viene definida por:

El Punto R (-9, 0), y su pendiente.

$$Pendiente\ recta\ RP: m_{rp} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ecuación de la recta punto pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En nuestro caso:

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x + 9)$$

Operando:

$$3y = x + 9$$

$$r_{rp} \equiv x - 3y + 9 = 0$$

La longitud de la altura h, la calculamos mediante la distancia de un punto a una recta como hemos indicado anteriormente

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Siendo, en nuestro caso:

$$x - 3y + 9 = 0; A = 1; B = -3; C = 9$$

$R\left(\frac{5}{3}, 0\right); x_1 = \frac{5}{3};\ y_1 = 0$

Luego:

$$h \equiv d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|1 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot 0 + 9\right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\frac{5}{3} + 9}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{\frac{5 + 27}{3}}{\sqrt{10}}$$

$$h \equiv d = \frac{32}{3\sqrt{10}}$$

Sustituyendo los valores de b y h en:

$$A_{PQR} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{PQR} = \frac{\sqrt{160} \cdot \frac{32}{3\sqrt{10}}}{2} = \frac{\sqrt{160} \cdot 32}{2 \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{16} \cdot \cancel{\sqrt{10}} \cdot 32}{2 \cdot 3\cancel{\sqrt{10}}} = \frac{4 \cdot 32}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 32}{3}$$

$$A_{PQR} = \frac{64}{3}\ u^2$$