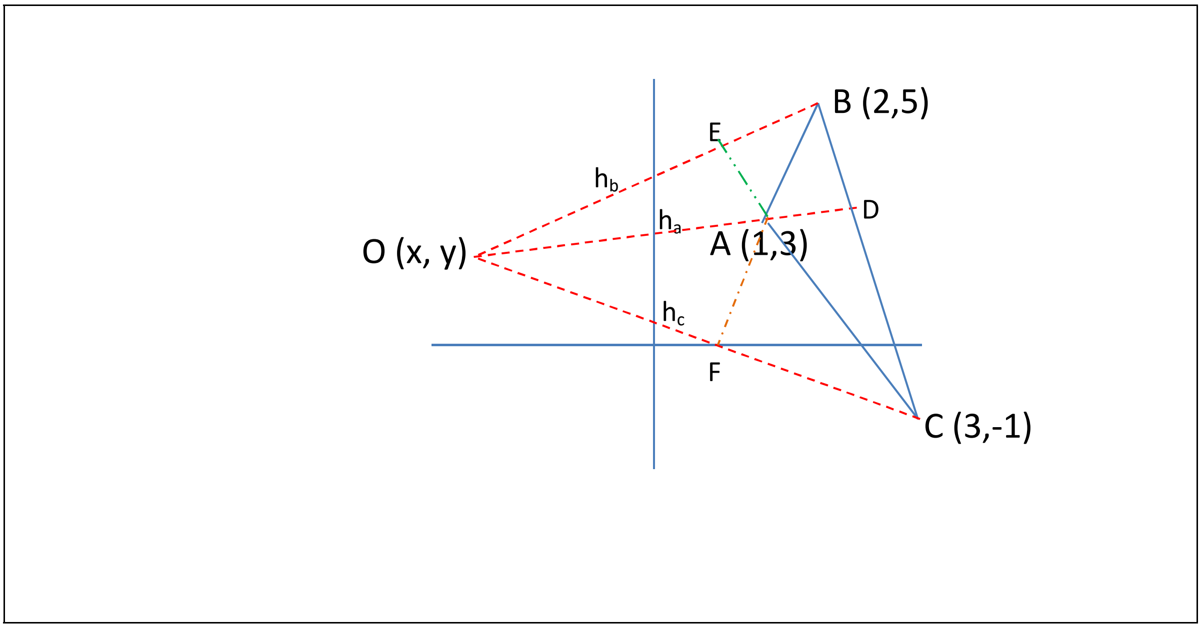
PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problema 61:

Se considera el triángulo de vértices A (1,3); B (2,5); C (3,-1). Calcular las coordenadas del ortocentro.

Solución Problema 61:



Ortocentro es el punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo. Al ser un triángulo obtusángulo, el ortocentro está en el exterior del triángulo.

Altura de un triángulo, respecto de uno de sus lados, es la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto.

Los vértices del triángulo son A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3).

El ortocentro es el punto O.

La altura h_a es la correspondiente al lado BC.

La altura h_b es la correspondiente al lado AC.

La altura h_c es la correspondiente al lado AB.

El punto D es la intersección de la altura h_a con el lado BC.

El punto E es la intersección de la altura h_b con la prolongación del lado AC.

El punto F es la intersección de la altura h_c con la prolongación del lado AB.

Calculamos las ecuaciones de las rectas correspondientes a dos alturas, h_a y h_b, y así obtendremos el ortocentro, O, del triángulo.

<u>Cálculo de la recta AD= h_a</u>

Sabemos que:

- Pasa por el punto A (1,3)
- Pendiente de AD es perpendicular a la pendiente de BC:
  - $m_{AD} = \frac{-1}{m_{BC}}$
- $m_{BC} = \frac{-1-5}{3-2} = \frac{-6}{1} = -6$
- $m_{AD} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$
- Ecuación de la recta punto pendiente:
  - $y - y_o = m(x - x_o)$
  - $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 1)$
  - Operando:
  - $6y - 18 = x - 1$
  - $6y = x - 1 + 18$
  - $6y = x + 17$
  - $y = \frac{x+17}{6} = \frac{x}{6} + \frac{17}{6}$

Luego, la ecuación de la recta AD= h_a es:

$$AD \equiv h_a \equiv y = \frac{x}{6} + \frac{17}{6} \text{ } ecuación\ 1$$

Cálculo de la recta BE= h_b

Sabemos que:

- Pasa por el punto B (2,5)
- Pendiente de BE es perpendicular a la pendiente de AC:
  - $m_{BE} = \frac{-1}{m_{AC}}$
- $m_{AC} = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$
- $m_{BE} = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
- Ecuación de la recta punto pendiente:
  - $y - y_o = m(x - x_o)$
  - $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 2)$
  - **Operando:**
  - $2y - 10 = x - 2$
  - $2y = x - 2 + 10$
  - $2y = x + 8$
  - $y = \frac{x+8}{2} = \frac{x}{2} + 4$

Luego, la ecuación de la recta BE= h_b es:

$$BE \equiv h_b \equiv y = \frac{x}{2} + 4 \; ecuación\ 2$$

Por tanto, al conocer las ecuaciones de las alturas, h_a y h_b, hallamos el ortocentro O.

$$y = \frac{x}{6} + \frac{17}{6}$$

$$y = \frac{x}{2} + 4$$

$$\frac{x}{6} + \frac{17}{6} = \frac{x}{2} + 4$$

$$\frac{x + 17}{6} = \frac{x + 8}{2}$$

$$\frac{x+17}{3} = x+8$$

$$x+17 = 3 \cdot (x+8)$$

$$x+17 = 3x+24$$

$$x-3x = 24-17$$

$$-2x = 7$$

$$x = \frac{-7}{2} = -3{,}5$$

Sustituyendo su valor en la ecuación 2:

$$BE \equiv h_b \equiv y = \frac{x}{2} + 4 \; ecuación \; 2$$

$$y = \frac{\frac{-7}{2}}{2} + 4 = \frac{-7}{4} + 4 = \frac{-7+16}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Luego, las coordenadas del ortocentro serán:

$$\boldsymbol{O \equiv x = -3{,}5; \quad y = 2{,}25}$$