

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Problema 80:

Los tres lados de un triángulo de 18 m de perímetro están en progresión aritmética, y la suma de sus cuadrados es 116. Calcular el coseno del ángulo mayor.

Solución Problema 80:

Sean a , b y c los tres lados del triángulo, de manera que:

$$a = a_1$$

$$b = a_2$$

$$c = a_3$$

Como están en progresión aritmética:

$$a = a_1$$

$$b = a_2 = a_1 + d$$

$$c = a_3 = a_1 + 2d$$

Su perímetro suma 18 m:

$$a + b + c = 18$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 18$$

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 18$$

$$3a_1 + 3d = 18$$

Simplificando por 3:

$$a_1 + d = 6$$

$$a_1 = 6 - d \text{ ecuación 1}$$

La suma de sus cuadrados es 116

$$a^2 + b^2 + c^2 = 116$$

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 116$$

$$a_1^2 + (a_1^2 + d^2 + 2a_1d) + (a_1^2 + 4d^2 + 4a_1d) = 116$$

$$3a_1^2 + 5d^2 + 6a_1d = 116 \text{ ecuación 2}$$

Sustituyendo el valor de a_1 de la ecuación 1 en la 2, y operando:

$$3(6 - d)^2 + 5d^2 + 6(6 - d)d = 116$$

$$3(36 + d^2 - 12d) + 5d^2 + 6(6d - d^2) = 116$$

$$108 + 3d^2 - 36d + 5d^2 + 36d - 6d^2 = 116$$

$$2d^2 = 116 - 108$$

$$2d^2 = 8$$

$$d^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$d = \sqrt{4} = 2$$

Hallamos a_1 :

$$a_1 = 6 - d \text{ ecuación 1}$$

$$a_1 = 6 - 2 = 4$$

Calculamos los tres lados:

$$a = a_1 = 4$$

$$b = a_2 = a_1 + d = 4 + 2 = 6$$

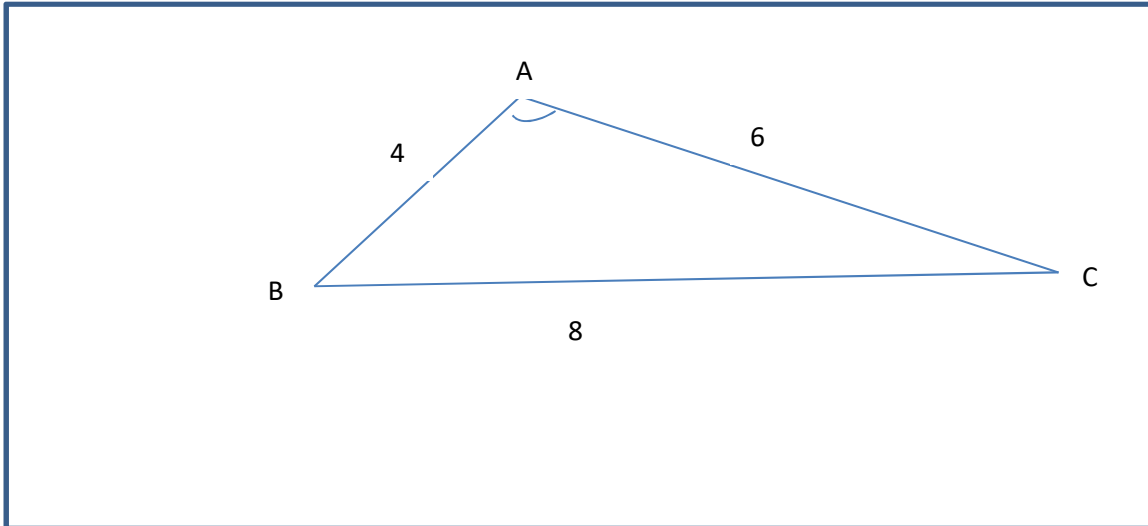
$$c = a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$$

Calculamos el coseno del ángulo mayor, para ello, recordamos que:

En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

En nuestro caso, el lado mayor mide 8 metros, y por tanto el ángulo a calcular, será el A.

Como conocemos los tres lados, aplicaremos el teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$2bccosA = b^2 + c^2 - a^2$$

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$cosA = \frac{6^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{36 + 16 - 64}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{-12}{48} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

$$A = \arccos(-0,25) = 104,477^\circ$$