

COMBINATORIA

Problema 94

Calcular:

a.- El número n de números de cinco cifras que se pueden escribir, empleando únicamente las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.

b.- La suma de los números así formados.

c.- El valor de la derivada de la función

$$y = \sqrt{\frac{n+x}{x}}$$

Para $x=p$ en donde n es el número hallado en "a" y

$$p = \frac{1}{3} \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$$

Solución Problema 94:

a.- El número n de números de cinco cifras que se pueden escribir, empleando únicamente las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.

Las cinco cifras impares: 1, 3, 5, 7 y 9

Luego serán:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

b.- La suma de los números así formados.

Los números formados tienen 5 cifras, están formados por: unidades (1), decenas (10), centenas (100), unidades de millar (1000) y decenas de milla (10000).

Cada cifra (1, 3, 5, 7, 9) ocupará el puesto de las unidades que será fijo rotando las otras 4 cifras por eso las variaciones de los cinco elementos tomados de 4 en 4.

Lo mismo sucederá para el resto de posiciones de las cifras en las posiciones de las decenas, centenas, y unidades y decenas de millar.

DECENAS DE MILLAR	UNIDADES DE MILLAR	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
$1 \cdot V_{5,4}$	$1 \cdot V_{5,4}$	$1 \cdot V_{5,4}$	$1 \cdot V_{5,4}$	$1 \cdot V_{5,4}$
$3 \cdot V_{5,4}$	$3 \cdot V_{5,4}$	$3 \cdot V_{5,4}$	$3 \cdot V_{5,4}$	$3 \cdot V_{5,4}$
$5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot V_{5,4}$
$7 \cdot V_{5,4}$	$7 \cdot V_{5,4}$	$7 \cdot V_{5,4}$	$7 \cdot V_{5,4}$	$7 \cdot V_{5,4}$
$9 \cdot V_{5,4}$	$9 \cdot V_{5,4}$	$9 \cdot V_{5,4}$	$9 \cdot V_{5,4}$	$9 \cdot V_{5,4}$

Teniendo en cuenta que hay 5 dígitos (1, 3, 5, 7, 9) y 5 veces $V_{5,4}$, en total la suma será:

$5 \cdot 5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot 5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot 5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot 5 \cdot V_{5,4}$	$5 \cdot 5 \cdot V_{5,4}$
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

$$S = 25 \cdot V_{5,4} \cdot 10000 + 25 \cdot V_{5,4} \cdot 1000 + 25 \cdot V_{5,4} \cdot 100 + 25 \cdot V_{5,4} \cdot 10 + 25 \cdot V_{5,4} \cdot 1$$

$$= 25 \cdot V_{5,4} \cdot (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) = 25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11.111$$

$$S = 33.333.000$$

c.- El valor de la derivada de la función

$$y = \sqrt{\frac{n+x}{x}}$$

Para $x=p$ en donde n es el número hallado en "a" y

$$p = \frac{1}{3} \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \dots}}}$$

Calculamos p , para ello:

$$3p = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$$

Tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\log 3p = \log \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$$

$$\log 3p = \log (3\sqrt{3\sqrt{3}\dots})^{\frac{1}{2}}$$

$$\log 3p = \frac{1}{2} \log(3\sqrt{3\sqrt{3}\dots})$$

$$\log 3p = \frac{1}{2} [\log 3 + \log \sqrt{3\sqrt{3}\dots}]$$

Pero sabemos que:

$$\log \sqrt{3\sqrt{3}\dots} = \log 3p$$

Luego:

$$\log 3p = \frac{1}{2} [\log 3 + \log 3p]$$

$$2 \log 3p = \log 3 + \log 3p$$

$$2 \log 3p - \log 3p = \log 3$$

$$\log 3p = \log 3$$

Luego, podemos simplificar logaritmos en los dos términos:

$$3p = 3$$

$$p = \frac{3}{3} = 1$$

Hallamos la derivada de:

$$y = \sqrt{\frac{n+x}{x}}$$

$$y' = \frac{\frac{(0+1) \cdot x - 1(n+x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{n+x}{x}}} = \frac{x-n-x}{2x^2\sqrt{\frac{n+x}{x}}} = \frac{-n}{2x^2\sqrt{\frac{n+x}{x}}}$$

$$y' = \frac{-n}{2x^2\sqrt{\frac{n+x}{x}}}$$

Hallamos y' para $x=p$, siendo $p=1$; y $n=120$

$$y'(1) = \frac{-120}{2 \cdot (1)^2 \sqrt{\frac{120+1}{1}}} = \frac{-120}{2 \cdot (1)^2 \sqrt{\frac{120+1}{1}}} = \frac{-120}{2\sqrt{121}} = \frac{-60}{11}$$

$$y'(1) = \frac{-60}{11}$$