COMBINATORIA

Problema 93

Resolver la ecuación:

$$2 \cdot \binom{2x}{x} = 7 \cdot \binom{2x-2}{x-1}$$

Supuesto que x es un número natural

Solución Problema 93:

Lo resolveremos de dos formas.

Forma 1:

Sabemos que

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot m}$$

Desarrollamos cada elemento de la ecuación por separado para mayor claridad:

$$\binom{2x}{x} = \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2) \dots \cdot (2x-x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot x} = \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2) \dots \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot x}$$

El término anterior a (x+1) será: (x+2), luego:

$$\binom{2x}{x} = \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2) \dots \cdot (x+2) \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot x}$$

Ahora el otro elemento de la ecuación:

$$\binom{2x-2}{x-1} = \frac{(2x-2) \cdot (2x-3) \dots \cdot [2x-2-(x-1)+1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1)} = \frac{(2x-2) \cdot (2x-3) \dots \cdot [2x-2-x+1+1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1)}$$

$$= \frac{(2x-2) \cdot (2x-3) \dots \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1)}$$

El término anterior a x será: (x+1), luego:

$$\binom{2x-2}{x-1} = \frac{(2x-2) \cdot (2x-3) \dots \cdot (x+1) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1)}$$

Una vez desarrollados los dos términos, los igualamos como dice el enunciado del problema:

$$2 \cdot \binom{2x}{x} = 7 \cdot \binom{2x-2}{x-1}$$

$$2 \cdot \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2) \dots \cdot (x+2) \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1) \cdot x} = 7 \cdot \frac{(2x-2) \cdot (2x-3) \dots \cdot (x+1) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (x-1)}$$

$$2 \cdot \frac{2\cancel{x} \cdot (2x-1) \cdot \cancel{(2x-2) \ldots \cdot (x+2) \cdot (x+1)}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (x-1)} \cdot \cancel{x}} = 7 \cdot \frac{\cancel{(2x-2) \cdot (2x-3) \ldots \cdot (x+1)} \cdot x}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (x-1)}}$$

$$2 \cdot 2 \cdot (2x-1) = 7x$$

$$4 \cdot (2x-1) = 7x$$

$$8x - 4 = 7x$$

$$8x - 7x = 4$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

Forma 2:

Sabemos también que:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Desarrollamos cada elemento de la ecuación por separado para mayor claridad:

$$\binom{2x}{x} = \frac{2x!}{x! \cdot (2x-x)!} = \frac{2x!}{x! \cdot x!}$$

$$\binom{2x-2}{x-1} = \frac{(2x-2)!}{(x-1)! \cdot [(2x-2)-(x-1)]!} = \frac{(2x-2)!}{(x-1)! \cdot [2x-2-x+1]!} = \frac{(2x-2)!}{(x-1)! \cdot (x-1)!}$$

Una vez desarrollados los dos términos, los igualamos como dice el enunciado del problema:

$$2 \cdot \binom{2x}{x} = 7 \cdot \binom{2x-2}{x-1}$$

$$2 \cdot \frac{2x!}{x! \cdot x!} = 7 \cdot \frac{(2x-2)!}{(x-1)! \cdot (x-1)!}$$

$$2 \cdot \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2)!}{(x-1)! \cdot x \cdot (x-1)! \cdot x} = 7 \cdot \frac{(2x-2)!}{(x-1)! \cdot (x-1)!}$$

$$2 \cdot \frac{2\cancel{x} \cdot (2x-1) \cdot \cancel{(2x-2)!}}{\cancel{(x-1)!} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)!} \cdot x} = 7 \cdot \frac{\cancel{(2x-2)!}}{\cancel{(x-1)!} \cdot \cancel{(x-1)!}}$$

$$2 \cdot \frac{2 \cdot (2x-1)}{x} = 7$$

$$2 \cdot 2 \cdot (2x-1) = 7x$$

$$4 \cdot (2x-1) = 7x$$

$$8x - 4 = 7x$$

$$8x - 7x = 4$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$