LÍMITES

Problema 7:

Deduce el término general de la sucesión.

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19} \dots$$

Halla su límite.

Solución Problema 7:

La sucesión

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19} \dots$$

Se puede expresar como:

$$\frac{1^2}{1^2+3}, \frac{2^2}{2^2+3}, \frac{3^2}{3^2+3}, \frac{4^2}{4^2+3} \dots$$

Por tanto, su término general será:

$$\frac{n^2}{n^2+3}$$

Halla su límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$$

Comprobamos que es una indeterminación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \frac{\infty}{\infty+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Como es un límite que tiende a infinito, dividimos numerador y denominador por la máximo exponente de n, n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

Otra forma de calcular, en este caso, el término general es de la siguiente forma:

Comprobamos si son sucesiones cuadráticas cuyo término general es de la forma:

$T_n = an^2 + bn + c$

Es de igual forma que un trinomio de segundo grado pero al tratarse de sucesiones se usa la letra n como incógnita en lugar de la x:

Se ordenan de la siguiente manera:

1 ··········· 4 ············ 9 ············ 16 ············· 25

+3 ··········· +5 ··········· +7 ·············· +9

+2 ··········· +2 ··········· +2

Comprobándose que es una sucesión cuadrática.

A continuación, aplicamos la siguiente fórmula:

a+b+c = 1 ··········· 4 ············ 9 ············ 16 ············· 25

3a+b = +3 ··········· +5 ··········· +7 ·············· +9

2a= +2 ··········· +2 ··········· +2

De este modo obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

$a + b + c = 1 \ ecuación\ 1$

$3a + b = 3 \ ecuación\ 2$

$2a = 2 \ ecuación\ 3$

De la ecuación 3, obtenemos a:

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

Sustituimos su valor en la ecuación 2, y hallamos b:

$3a + b = 3 \ ecuación\ 2$

$3 \cdot 1 + b = 3$

$\boldsymbol{b} = 3 - 3 = \mathbf{0}$

Sustituyendo el valor de a y b en la ecuación 1 obtenemos el valor de c:

$a + b + c = 1 \; ecuación \; 1$

$\boldsymbol{c} = 1 - a - b = \; 1 - 1 - 0 = \mathbf{0}$

Luego, el término general será:

$T_n = an^2 + bn + c$

$T_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 0$

$\boldsymbol{T_n = n^2}$

Procedemos de igual forma para la sucesión:

a+b+c =	4		7		12		19
3a+b =		+3		+5		+7	
2a=			+2		+2		

De este modo obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

$a + b + c = 4 \; ecuación \; 1$

$3a + b = 3 \; ecuación \; 2$

$2a = 2 \; ecuación \; 3$

De la ecuación 3, obtenemos a:

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

Sustituimos su valor en la ecuación 2, y hallamos b:

$3a + b = 3 \; ecuación \; 2$

$3 \cdot 1 + b = 3$

$\boldsymbol{b} = 3 - 3 = \mathbf{0}$

Sustituyendo el valor de a y b en la ecuación 1 obtenemos el valor de c:

$a + b + c = 4 \; ecuación \; 1$

$\boldsymbol{c} = 4 - a - b = \ 4 - 1 - 0 = \mathbf{3}$

Luego, el término general será:

$T_n = an^2 + bn + c$

$T_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 3$

$\boldsymbol{T_n = n^2 + 3}$