

LÍMITES

Problema 7:

Deduce el término general de la sucesión.

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19}, \dots$$

Halla su límite.

Solución Problema 7:

La sucesión

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19}, \dots$$

Se puede expresar como:

$$\frac{1^2}{1^2 + 3}, \frac{2^2}{2^2 + 3}, \frac{3^2}{3^2 + 3}, \frac{4^2}{4^2 + 3}, \dots$$

Por tanto, su término general será:

$$\frac{n^2}{n^2 + 3}$$

Halla su límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3}$$

Comprobamos que es una indeterminación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Como es un límite que tiende a infinito, dividimos numerador y denominador por la máxima potencia de n , n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

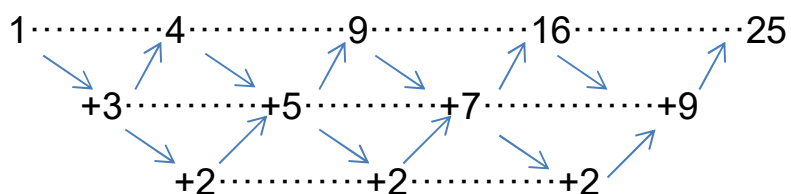
Otra forma de calcular, en este caso, el término general es de la siguiente forma:

Comprobamos si son sucesiones cuadráticas cuyo término general es de la forma:

$$T_n = an^2 + bn + c$$

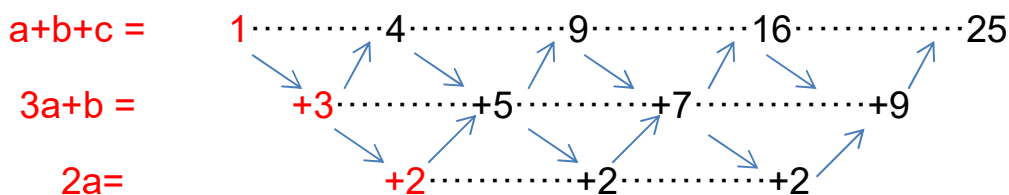
Es de igual forma que un trinomio de segundo grado pero al tratarse de sucesiones se usa la letra n como incógnita en lugar de la x:

Se ordenan de la siguiente manera:



Comprobándose que es una sucesión cuadrática.

A continuación, aplicamos la siguiente fórmula:



De este modo obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$a + b + c = 1 \text{ ecuación 1}$$

$$3a + b = 3 \text{ ecuación 2}$$

$$2a = 2 \text{ ecuación 3}$$

De la ecuación 3, obtenemos a:

$$a = \frac{2}{2} = 1$$

Sustituimos su valor en la ecuación 2, y hallamos b:

$$3a + b = 3 \text{ ecuación 2}$$

$$3 \cdot 1 + b = 3$$

$$b = 3 - 3 = 0$$

Sustituyendo el valor de a y b en la ecuación 1 obtenemos el valor de c:

$$a + b + c = 1 \text{ ecuación 1}$$

$$c = 1 - a - b = 1 - 1 - 0 = 0$$

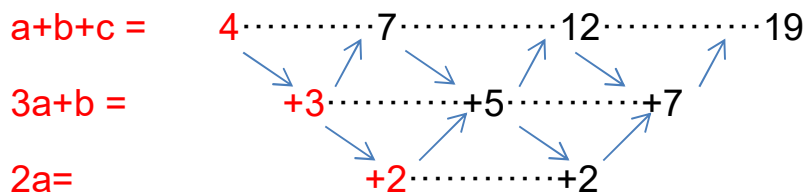
Luego, el término general será:

$$T_n = an^2 + bn + c$$

$$T_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 0$$

$$T_n = n^2$$

Procedemos de igual forma para la sucesión:



De este modo obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$a + b + c = 4 \text{ ecuación 1}$$

$$3a + b = 3 \text{ ecuación 2}$$

$$2a = 2 \text{ ecuación 3}$$

De la ecuación 3, obtenemos a:

$$a = \frac{2}{2} = 1$$

Sustituimos su valor en la ecuación 2, y hallamos b:

$$3a + b = 3 \text{ ecuación 2}$$

$$3 \cdot 1 + b = 3$$

$$b = 3 - 3 = 0$$

Sustituyendo el valor de a y b en la ecuación 1 obtenemos el valor de c:

$$a + b + c = 4 \text{ ecuación 1}$$

$$c = 4 - a - b = 4 - 1 - 0 = 3$$

Luego, el término general será:

$$T_n = an^2 + bn + c$$

$$T_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 3$$

$$\mathbf{T_n = n^2 + 3}$$