LÍMITES

Problema 6:

Dada la sucesión,

$$\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \ldots$$

En la que n es un número natural, hallar:

1.- El enésimo término y la suma de los n primeros términos.

2.- El valor de n para que esta suma sea 51.

Solución Problema 6:

1.- El enésimo término y la suma de los n primeros términos.

Es una progresión aritmética, y calculamos la diferencia:

$$\boldsymbol{d} = a_2 - a_1 = n - \left(\frac{n^2-1}{n}\right) = \frac{n^2-n^2+1}{n} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$$

Veamos la ley de formación de los términos para hallar el término a_n:

$$a_1 = \frac{n^2-1}{n},$$

$$a_2 = a_1 + d = \frac{n^2-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n^2-1+1}{n} = \frac{n^2}{n} = n + 0. \textit{Es decir}: 2-0=2$$

$$a_3 = a_2 + d = n + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{n}. \textit{Es decir}: 3-1=2$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{n^2+1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+2}{n}. \textit{Es decir}: 4-2=2$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{n^2+2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+3}{n}. \textit{Es decir}: 5-3=2$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{n^2+3}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+4}{n}. \textit{Es decir}: 6-4=2$$

Están puestos en rojo para destacar, y significa que hay 2 números de diferencia. Luego, el término enésimo será:

$$a_n = \frac{n^2 + (n-2)}{n}$$

Hallamos la suma de los n primeros términos:

$$S_{\boldsymbol{n}} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{\frac{n^2-1}{n} + \frac{n^2+(n-2)}{n}}{2} \cdot n = \frac{\frac{n^2-1+n^2+n-2}{n}}{2} \cdot n = \frac{2n^2+n-3}{2\cancel{n}} \cdot \cancel{n} =$$

$$= \frac{2n^2+n-3}{2}$$

Luego:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2n^2+n-3}{2}}$$

2.- El valor de n para que esta suma sea 51.

$$51 = \frac{2n^2+n-3}{2}$$

$$102 = 2n^2 + n - 3$$

$$2n^2 + n - 3 - 102 = 0$$

$$2n^2 + n - 105 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+840}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{841}}{4} = \frac{-1 \pm 29}{4}$$

$$n_1 = \frac{-1+29}{4} = \frac{28}{4} = 7 \ solución\ válida$$

$$x_2 = \frac{-1-29}{4} = \frac{-30}{4} = \frac{-15}{2} \ no\ válida\ porque\ n\ tiene\ que\ ser\ natural$$

Luego,

$$\boldsymbol{n = 7}$$