LÍMITES

Problema 5:

Calcular el valor de la expresión:

$$\left(\frac{p^4}{27^q}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Siendo n:

$$n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \dots$$

P, es el módulo de (3-4i), y es el verdadero valor, para x= 3, de:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Solución Problema 5:

Calculamos n:

$$n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \dots = \ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \dots$$

Es una progresión geométrica de infinitos términos. Calculamos su razón:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Ahora, calculamos su suma, es decir n:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3 - 1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Luego:

$$\boldsymbol{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \dots = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Ahora, calculamos p que es el módulo del complejo: 3-4i.

Es un número complejo cuya representación está en el 4º cuadrante.

$\boldsymbol{p} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

Finalmente, hallamos q:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Comprobamos que es una indeterminación, para ello sustituimos el valor de x en el límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} = \frac{9 - 6 - 3}{9 - 12 + 3} = \frac{0}{0}$$

Al ser un límite de expresiones algebraicas, hacemos la descomposición factorial de los polinomios:

$$P(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_{11} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_{12} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$P(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1)$$

Igualmente para:

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_{21} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_{22} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3) \cdot (x - 1)$$

Luego,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-3)}\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego:

$\boldsymbol{q = 2}$

Finalmente, calculamos la expresión pedida:

$$\left(\frac{p^4}{27^q}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sustituyendo sus valores:

$$\left(\frac{5^4}{27^2}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{5^4}{(3^3)^2}\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{5^4}{3^6}\right]^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5^4}{3^6}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{5^8}{3^{12}}} = \frac{\sqrt[3]{5^8}}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{5^2\sqrt[3]{5^2}}{3^4} = \frac{25\sqrt[3]{25}}{81}$$

Luego,

$$\boldsymbol{\left(\frac{p^4}{27^q}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{25\sqrt[3]{25}}{81}}$$