

PROBLEMAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y OPERACIONES

Problema 122:

Descomponer en suma de fracciones simples la fracción algebraica:

$$F(x) = \frac{3x^2 - nx + 11}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)}$$

En la que n es el número de divisores de 54.000

Solución Problema 122:

Hacemos la descomposición factorial de 54000:

$$54000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

El número de divisores de un número se obtiene sumando la unidad a los exponentes del número descompuesto factorialmente, y multiplicando los resultados obtenidos. En nuestro caso:

$$(4 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (3 + 1) = 5 \cdot 4 \cdot 4 = 80 \text{ divisores.}$$

La fracción quedará:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3x^2 - 80x + 11}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3} = \\ &= \frac{A(x^2 + 5x + 6) + B(x^2 + 4x + 3) + C(x^2 + 3x + 2)}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)} = \\ &= \frac{Ax^2 + 5Ax + 6A + Bx^2 + 4Bx + 3B + Cx^2 + 3Cx + 2C}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)} = \end{aligned}$$

Agrupando por grado de la incógnita, y el término independiente:

$$= \frac{x^2(A + B + C) + x(5A + 4B + 3C) + (6A + 3B + 2C)}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)}$$

Luego:

$$\frac{3x^2 - 80x + 11}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{x^2(A + B + C) + x(5A + 4B + 3C) + (6A + 3B + 2C)}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)}$$

Luego:

PROBLEMAS DE EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS Y OPERACIONES

Igualando para x^2 :

$$3 = A + B + C \text{ ecuación 1}$$

Igualando para x :

$$80 = 5A + 4B + 3C \text{ ecuación 2}$$

Igualando para el término independiente:

$$11 = 6A + 3B + 2C \text{ ecuación 3}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

La ecuación 1 por (-3) y le sumamos la ecuación 2

$$-9 = -3A - 3B - 3C$$

$$80 = 5A + 4B + 3C$$

Operando:

$$71 = 2A + B \text{ ecuación 4}$$

La ecuación 1 por (-2) y le sumamos la ecuación 3

$$-6 = -2A - 2B - 2C$$

$$11 = 6A + 3B + 2C$$

Operando:

$$5 = 4A + B \text{ ecuación 5}$$

Ahora tomamos la ecuación 4 y 5 por (-1) :

$$71 = 2A + B$$

$$-5 = -4A - B$$

Obtenemos A:

$$66 = -2A$$

$$A = \frac{-66}{2} = -33$$

PROBLEMAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y OPERACIONES

Sustituimos el valor de A en la ecuación 5 para obtener B:
 $5 = 4A + B$

$$B = 5 - 4A = 5 - 4 \cdot (-33) = 5 + 132 = 137$$

Sustituimos el valor de A y B en la ecuación 1 para obtener C:

$$3 = A + B + C$$

$$C = 3 - A - B = 3 - (-33) - 137 = 3 + 33 - 137 = -101$$

Los valores de A, B y C son:

$$A = -33; B = 137; C = -101$$

La fracción F(x) quedará:

$$F(x) = \frac{3x^2 - 80x + 11}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{-33}{x + 1} + \frac{137}{x + 2} - \frac{101}{x + 3}$$