DETERMINANTES

Problema 6 CURSO ACCESO PREUNIVERSITARIO PB 85 PÁG 47

Resolver las siguientes cuestiones:

a) Hallar los valores de los adjuntos A_{21}, A_{22}, A_{23} y A_{24} de los elementos de la segunda fila del determinante:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

b) Desarrollar en fracción continua la fracción ordinaria:
   $- A_{21}/ A_{22}$

c) Escribir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son los dos últimos cocientes incompletos de esta fracción continua y tal que el coeficiente de la x^2 sea 3, y encontrar el área de la porción de plano limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función y= P(x) siendo P(x) el polinomio primer miembro de la citada ecuación.

Solución Problema 6:

a) Hallar los valores de los adjuntos A_{21}, A_{22}, A_{23} y A_{24} de los elementos de la segunda fila del determinante:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

Sabemos que:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \propto_{ij}$$

Siendo:

$\propto_{ij}$ *es el menor complementario del elemento* a_{ij}

A_{ij} *es el adjunto del elemento* a_{ij} *en la fila* i, *y la columna* j

Hallamos: A_{21}:

$$\begin{array}{cccc} \cancel{1} & 0 & 3 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 1 & 3 \\ \cancel{2} & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3(0+63+0-14-0-0) = (-1)\cdot 49 = -49$$

$A_{21} = -49$

Hallamos: A_{22}:

$$\begin{array}{cccc} 1 & \cancel{0} & 3 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & 1 & 3 \\ 2 & \cancel{7} & 1 & 4 \end{array}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4(4+18-0-4-3-0) = 15$$

$A_{22} = 15$

Hallamos: A_{23}:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & \cancel{1} & 3 \\ 2 & 7 & \cancel{1} & 4 \end{array}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5(0+0+0-0-21-0) = (-1)\cdot(-21) = 21$$

$A_{23} = 21$

Hallamos: A_{24}:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & \cancel{3} \\ 2 & 7 & 1 & \cancel{4} \end{array}$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6(0+0+0-0-0-7) = -7$$

$A_{24} = -7$

a) Desarrollar en fracción continua la fracción ordinaria:
 - A_{21}/A_{22}

$$\frac{-(-49)}{15} = \frac{49}{15}$$

Calculamos la fracción continua, utilizando el algoritmo de la división:

$49 = 15 \cdot 3 + 4$

Dividiendo ambos miembros por 15:

$$\frac{49}{15} = \frac{15\cdot 3}{15} + \frac{4}{15} = 3 + \frac{4}{15}$$

Luego:

$$\frac{49}{15} = 3 + \frac{4}{15} = \ 3 + \frac{1}{\frac{15}{4}} \ dividido \ númerador \ y \ denominador \ por \ 4$$

Calculamos la fracción 15/4:

$$15 = 4 \cdot 3 + 3$$

Dividiendo ambos miembros por 4:

$$\frac{15}{4} = \ \frac{4 \cdot 3}{4} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

Luego:

$$\frac{49}{15} = 3 + \frac{4}{15} = \ 3 + \frac{1}{3 + \frac{3}{4}}$$

$$\frac{49}{15} = \ 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} \ dividido \ númerador \ y \ denominador \ por \ 3$$

Calculamos la fracción 4/3:

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

Dividiendo ambos miembros por 3:

$$\frac{4}{3} = \ \frac{3 \cdot 1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{49}{15} = \ 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Por tanto:

$$\frac{49}{15} = \ 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

c.- Escribir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son los dos últimos cocientes incompletos de esta fracción continua y tal que el coeficiente de la x^2 sea 3, y encontrar el área de la porción de plano limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función y= P(x) siendo P(x) el polinomio primer miembro de la citada ecuación.

Los dos últimos cocientes incompletos serán: 1 y 3, así:

$$P(x) = 3(x-1) \cdot (x-3)$$

$$P(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Hallamos los puntos de corte de la curva con el eje de abscisa, es decir para y= 0

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$$x_1 = \frac{12+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{12-6}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Los puntos de corte con el eje X serán:

$$A(1;0) y\ B\ (3,0)$$

Hallamos el vértice de la curva derivando:

$$y' = 6x - 12$$

Para y´= 0

$$0 = 6x - 12$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

Hallamos la 2ª derivada:

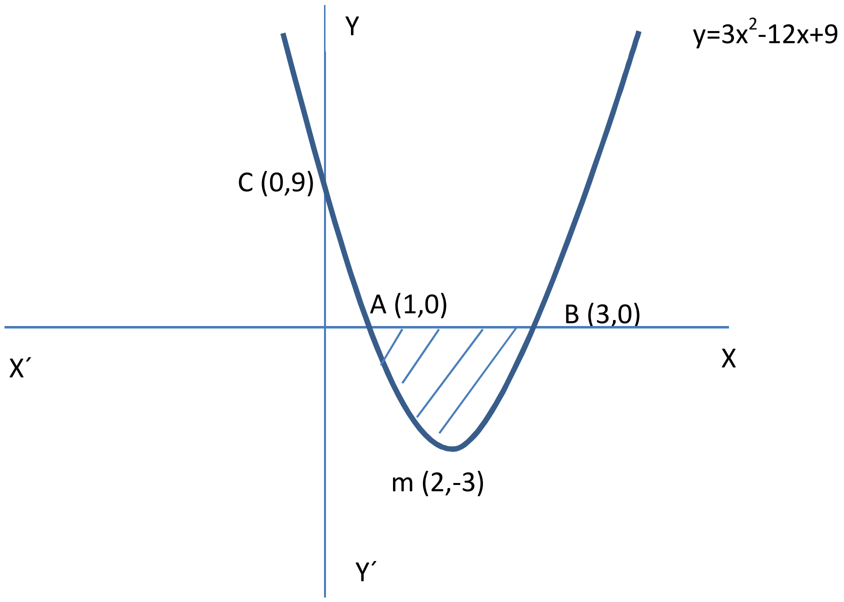
$$y'' = 6 > 0 \ luego\ será\ un\ mínimo$$

$y(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

La parábola tendrá el mínimo en:

$m\ (2, -3)$

Dibujamos su gráfica:



Hay que tener en cuenta que el área definida por la función y= P(x) está por debajo del eje de abscisa por lo que tomaremos el valor absoluto de la integral en el intervalo [1,3] evitando que salga un valor negativo para el área.

Por tanto: el área sombreada será:

$$\int_1^3 (3x^2 - 12x + 9)\ dx = \left[\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 9x \right) \right]_1^3 =$$

$$\left(\frac{3 \cdot (3)^3}{3} - \frac{12(3)^2}{2} + 9 \cdot 3 \right) - \left(\frac{3 \cdot (1)^3}{3} - \frac{12(1)^2}{2} + 9 \cdot 1 \right) =$$

$$(27 - 54 + 27) - (1 - 6 + 9) = -1 + 6 - 9 = -4$$

Tomando el valor absoluto, el área será:

$A = 4\ unidades\ de\ superficie$