DETERMINANTES

Problema 5

Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} es\ cero$$

Solución Problema 5:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} es\ cero$$

Aplicamos la siguiente propiedad: Si en un determinante una línea (fila o columna) está descompuesta en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix}$$

Aplicamos la siguiente propiedad: Si se permutan dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo. En el 2° determinante permutamos C2~C3

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & c & a \\ 1 & a & b \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

Aplicamos la siguiente propiedad: Si se permutan dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo. En el 2° determinante permutamos F1~F2

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & c & a \\ 1 & a & b \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - (-)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & a \\ 1 & b & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & a \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

Aplicamos la siguiente propiedad: Si se permutan dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo. En el 2º determinante permutamos F2~F3

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$$