DETERMINANTES

Problema 3

Sin desarrollar ninguno de los dos determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Solución Problema 3:

Emplearemos la siguiente propiedad: si en un determinante una línea (fila o columna) está descompuesta en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ m & n+l & l+m \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ n & n+l & l+m \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

Resolvemos D_1:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ m & n+l & l+m \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ m & n & l+m \\ x & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c+a \\ m & l & l+m \\ x & z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ m & n & m \\ x & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c & c+a \\ m & l & l+m \\ x & z & z+x \end{vmatrix} = 0 \; porque \; la \; columna \; 3 \; es \; combinación \; lineal \; de \; C3 = C2 + C1$$

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ m & n & m \\ x & y & x \end{vmatrix} = 0 \; porque \; la \; C1 = C3$$

Resolvemos D_2:

$$\begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ n & n+l & l+m \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ n & n & l+m \\ y & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ n & l & l+m \\ y & z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & c \\ n & l & l \\ y & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ n & l & m \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ n & l & m \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b & b & c+a \\ n & n & l+m \\ y & y & z+x \end{vmatrix} = 0 \; porque\; la\; C1 = C2$$

$$\begin{vmatrix} b & c & c \\ n & l & l \\ y & z & z \end{vmatrix} = 0 \; porque\; C2 = C3$$

Luego:

$$D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ n & l & m \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

Aplicamos: la siguiente propiedad: si se permutan dos líneas paralelas entre sí el determinante cambia de signo:

Pasamos la C3 a la C, dos permutaciones, y por tanto no cambia de signo.

$$D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ n & l & m \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & a & c \\ n & m & l \\ y & x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} - (-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$