COMBINATORIA

Problema 80:

Dados los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, se trata de calcular la cantidad de números de cuatro cifras que se pueden formar sin repetirse ninguna de ellas, que cumplan las siguientes características:

A. Total de números posibles.

B. Que empiecen en uno y acaben en siete.

C. Que no contengan ni el cuatro ni el cinco.

D. Que no contengan el dos ni el siete y si el seis.

E. Que contengan el uno.

F. Que comiencen en cuatro, acaben en tres y no contengan ni el cinco ni el siete.

G. Que la segunda cifra sea cinco y la última par.

H. Que la segunda cifra sea dos y la última uno.

I. Que empiecen en cuatro y no contengan el uno ni el seis.

J. Que el primero y el último sean impares y los del medio pares.

K. Que empiecen en impar y terminen en par.

L. Que el primero, segundo y cuarto sean impares y el tercero par.

M. Que contengan un impar.

N. Que tengan más pares que impares.

O. Que sean múltiplos de dos.

P. Que sean múltiplos de cinco.

Q. Que acaben en tres y tengan dos pares.

R. Que no contengan el uno ni el cuatro y tengan algún par.

S. Que contengan el cinco y el seis y dos impares.

T. Que los dos centrales sean pares.

Solución Problema 80:

A.- Total de números posibles.

Varía el orden y los elementos por tanto son variaciones.

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

B.- Que empiecen en uno y acaben en siete.

$$1n_1n_27$$

En este caso hay dos números fijos, el 1 y el 7, luego quedan 5 números para formar las agrupaciones.

1237----1327

1247----1347

1257----1357

1267----1367; y así sucesivamente, luego:

$$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

C.- Que no contengan ni el cuatro ni el cinco.

Se excluyen el 4 y 5, y quedan 5 números para formar las agrupaciones

$$V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

D.- Que no contengan el dos ni el siete y si el seis.

Se excluyen el 2 y el 7, y tiene que incluirse el 6, es fijo, quedan 4 números para rotar formando las agrupaciones con el número 6

$$4 \cdot V_{4,3} = 4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 4 \cdot 24 = 96$$

E.- Que contengan el uno.

$$1n_1n_2n_3$$

Hay un número fijo que es el 1, y quedan 6 para formar las agrupaciones

$$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Pero el 1puede estar en cuatro posiciones distintas:

$1n_1n_2n_3$- $n_1 1\ n_2\ n_3$- $n_1\ n_2 1\ n_3$- $n_1\ n_2\ n_3 1$

Luego será:

$$4 \cdot V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 4 \cdot 120 = 480$$

F. Que comiencen en cuatro, acaben en tres y no contengan ni el cinco ni el siete.

Hay dos fijos, el cuatro y el tres; y dos que no se cuentan, luego hay 3 números para formar las agrupaciones:

$4\ n_1n_2 3$

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

G. Que la segunda cifra sea cinco y la última par.

<u>Números impares</u>

1ª posibilidad:

El número empiece por una cifra impar, hay disponibles 3: 1, 3, 5

La 2ª cifra es fija: 5

La 3ª cifra sea también impar: habrá disponibles dos cifras (3 y 7; 1 y 3; 1 y 7)

La última cifra es par, habrá 3 posibilidades: 2, 4, 6

$$ip_1 5 ip_2 p_1$$

1532--1572

1534--1574

1536—1576

En este caso habrá 6 agrupaciones por 3 cifras iniciales (1, 3, 5):

$$6 \cdot 3 = \ 18\ agrupaciones$$

2ª posibilidad:

El número empiece por una cifra impar, hay disponibles: 1, 3, 7

La 2ª cifra es fija: 5

La 3ª cifra sea par: habrá tres posibilidades: 2, 4, 6

La última cifra es par, habrá 3 posibilidades (4 y 6; 2 y 4; 2 y 6)

$ip_1 5 p_1 p_2$

1524--1542--1562

1526--1546--1564

En este caso habrá 6 agrupaciones por 3 cifras iniciales (1, 3, 7):

$6 \cdot 3 = 18\, agrupaciones$

<u>Números pares</u>

1ª posibilidad:

El número empiece por una cifra par, hay disponibles: 2, 4, 6

La 2ª cifra es fija: 5

La 3ª cifra sea también impar: habrá tres posibilidades (1, 3, 7)

La última cifra es par, habrá 3 posibilidades: 2 y 4, 4 y 6, 2 y 6

$p_1 5 i p_1 p_2$

2514--2534--2574

2516--2536--2576

En este caso habrá 6 agrupaciones por 3 cifras iniciales (2, 4, 6):

$6 \cdot 3 = 18\, agrupaciones$

2ª posibilidad:

El número empiece por una cifra par, hay disponibles: 2, 4, 6

La 2ª cifra es fija: 5

La 3ª cifra sea también par: habrá tres posibilidades (2 y 4, 2 y 6, 4 y 6)

La última cifra es par, habrá 3 posibilidades: (2 , 4, 6)

$p_1 5 i p_1 p_2$

2546—2564—4526—4562—6524--6542

En este caso habrá 2 agrupaciones por 3 cifras iniciales (2, 4, 6):

$2 \cdot 3 = \ 6\ agrupaciones$

Se formarán:

$\mathbf{18 \cdot 3 + 6 = 54 + 6 = 60}\ \boldsymbol{agrupaciones}$

H. Que la segunda cifra sea dos y la última uno.

En este caso, hay dos cifras fijas, 2 y 1; y en la 1ª cifra hay 5 posibilidades (3, 4, 5, 6, 7) y en la cifra tercera habrá 4 posibilidades, por tanto se formarán:

$c_1 2 c_2 1 = 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 20\ agrupaciones$

I. Que empiecen en cuatro y no contengan el uno ni el seis.

$4 c_1 c_2 c_3$

Hay una cifra fija, el 4; y dos que no intervienen 1y 6, luego

$4 i p_1 i p_2\ i p_3 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4 i p_1 i p_2 p_1 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Pero el p_1 puede estar en tres sitios:

$4 i p_1 p_1 i p_2 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4 p_1 i p_1 i p_2 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Serán:

$4 i p_1 i p_2\ i p_3 + 3 \cdot (4 p_1 i p_1 i p_2) = 4 \cdot 6 = 24\ agrupaciones$

J. Que el primero y el último sean impares y los del medio pares.

$i p_1 p_1 p_2 i p_2$

En la primera cifra impar hay 4 posibilidades: 1, 3, 5, 7

En la primera cifra par hay 3 posibilidades: 2, 4, 6

En la segunda cifra par hay 3 posibilidades: 2 y 4; 2 y 6; 4 y 6

En la segunda cifra impar hay 4 posibilidades: 3, 5, 7; 1, 5, 7; 1, 3, 7; 1, 3, 5

1243—1263—1423—1463—1623--1643

1245—1265—1425—1465—1625--1645

1247—1267—1427—1467—1627—1647

Se formarán 4 agrupaciones (1, 3, 5, 7) con 18 componentes cada agrupación, en total:

$ip_1p_1p_2ip_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72\ agrupaciones$

K. Que empiecen en impar y terminen en par.

1ª posibilidad:

$ip_1ip_2ip_3p$

En la 1ª cifra impar hay 4 posibilidades: 1, 3, 5, 7

En la 2ª cifra impar hay 3 posibilidades: 3, 5, 7

En la 3ª cifra impar hay 3 posibilidades: 5 y 7; 3 y 7; 3 y 5

En la 4ª cifra par hay 3 posibilidades: 2, 4, 6

1352—1354—1356--1372—1374—1376 (En el diagrama de árbol estarían en vertical para no extender más la explicación lo pongo en horizontal)

Habrá 1x3x2x3= 18 y como hay 4 números (1, 3, 5, 7) para la primera cifra, serán

$ip_1ip_2ip_3p = 4 \cdot 18 = 72\ agrupaciones$

2ª posibilidad:

$ip_1ip_2p_1p_2$

En la 1ª cifra impar hay 4 posibilidades: 1, 3, 5, 7

En la 2ª cifra impar hay 3 posibilidades: 3, 5, 7

En la 3ª cifra, pares hay 3 posibilidades: 2, 4, 6

En la 4ª cifra, pares hay 2 posibilidades: 2 y 4, 2 y 6; 4 y 6

1324—1326—1342--1346—1362—1364 (En el diagrama de árbol estarían en vertical para no extender más la explicación lo pongo en horizontal)

Habrá 1x3x3x2= 18 y como hay 4 números impares (1, 3, 5, 7) para la primera cifra, serán

$$ip_1ip_2p_1p_2 = 4 \cdot 18 = 72\, agrupaciones$$

Será por 2 porque también puede ser:

$$ip_1p_1ip_2p_2 = 4 \cdot 18 = 72\, agrupaciones$$

Luego:

$$ip_1ip_2p_1p_2 + ip_1p_1ip_2p_2 = 2 \cdot 72 = 144$$

3ª posibilidad:

$ip_1p_1p_2p_3$

En la 1ª cifra impar hay 4 posibilidades: 1, 3, 5, 7

En la 2ª cifra, 1ª par hay 3 posibilidades: 2, 4, 6

En la 3ª cifra, 2ª par hay 3 posibilidades: 4 y 6; 2 y 4; 2 y 6

En la 4ª cifra par hay 3 posibilidades: 2, 4, 6

1246—1264—1426—1462—1624—1642 (En el diagrama de árbol estarían en vertical para no extender más la explicación lo pongo en horizontal)

Habrá 1x3x2x1= 6 y como hay 4 números impares (1, 3, 5, 7) para la primera cifra, serán

$$ip_1p_1p_2p_3 = 6 \cdot 4 = 24$$

En total se formarán:

$ip_1ip_2ip_3p + 2 \cdot ip_1ip_2p_1p_2 + ip_1p_1p_2p_3 \ = 72 + 2 \cdot 72 + 24 = 240$

L. Que el primero, segundo y cuarto sean impares y el tercero par.

$ip_1ip_2p_1ip_3$

En la 1ª cifra impar hay 4 números: 1, 3, 5, 7

En la 2ª cifra, 2ª impar hay 4 ternas posibles: (3, 5 y 7); (1, 5 y 7); (1, 3 y 7); (1, 3 y 5)

En la 3ª cifra, 2ª par hay 3 números: 2, 4 y 6

En la 4ª cifra, 3ª impar hay 3 binomios para cada terna y 1ª cifra impar: (5 y 7); (3 y 7); (3 y 5) dependiendo de las números impares colocados en las cifras impares 1 y 2 respectivamente, por tanto serán: 1x3x3x2= 18 y como hay 4 números impares (1, 3, 5, 7) para la primera cifra, serán

$ip_1ip_2p_1ip_3 = 4 \cdot 18 = 72$

M. Que contengan un impar.

$p_1p_2p_3ip_1$

$\boldsymbol{V_{3,1} \cdot V_{2,1} \cdot V_{1,1} \cdot V_{4,1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 24}$

Pero el número impar puede estar en 4 posiciones diferentes:

$p_1p_2p_3ip_1$

$p_1p_2ip_1p_3$

$p_1ip_1p_2p_3$

$ip_1p_1p_2p_3$

Por tanto serán:

$\boldsymbol{4 \cdot (V_{3,1} \cdot V_{2,1} \cdot V_{1,1} \cdot V_{4,1}) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 96}$

N. Que tengan más pares que impares.

Tener más pares que impares quiere decir que tenga 3 pares y un impar, luego es igual que el apartado anterior, por tanto serán: 96

O. Que sean múltiplos de dos.

Es necesario que acaben en par, o sea en 2, 4 o 6.

$ip_1ip_2ip_3p_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

$ip_1ip_2p_1p_2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

$ip_1p_1ip_2p_2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

$p_1ip_1ip_2p_2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

$p_1ip_2ip_1p_2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

$total\ agrupaciones = 72 \cdot 5 = 360$

P. Que sean múltiplos de cinco.

Para ello deben acabar en 5:

Serán la séptima parte del total:

$\frac{1}{7}V_{7,4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{7} = 120$

Q. Que acaben en tres y tengan dos pares.

Serán:

$ip_1p_1p_2 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

Pero ip_1 puede estar en tres sitios:

$p_1ip_1p_2 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

$p_1p_2ip_1 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

Por tanto,

$ip_1p_1p_2 3 + p_1ip_1p_2 3 + p_1p_2ip_1 3 = 18 + 18 + 18 = 54$

R. Que no contengan el uno ni el cuatro y tengan algún par.

Al no contener el 1 impares quedan 3 (3, 5, 7) y al no tener el 4 pares quedan 2 (2 y 6), serán:

Posibilidad 1: 3 impares y 1 par

$ip_1 ip_2 ip_3 p_1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Pero el número par puede estar en 4 sitios:

$ip_1 ip_2 ip_3 p_1$

$ip_1 ip_2 p_1 ip_3$

$ip_1 p_1 ip_2 ip_3$

$p_1 ip_1 ip_2 ip_3$

Luego será:

$4(ip_1 ip_2 ip_3 p_1) = 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) = 4 \cdot 12 = 48\ agrupaciones$

Posibilidad 2: 2 impares y 2 pares

$ip_1 ip_2 p_1 p_2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

$ip_1 p_1 ip_2 p_2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

$p_1 ip_1 ip_2 p_2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

$p_1 p_2 ip_1 ip_2 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

$ip_1 p_1 p_2 ip_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

$p_1 ip_1 p_2 ip_2 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Por tanto serán:

$6 \cdot 12 = 72\ agrupaciones$

Total serán:

$48 + 72 = 120\ agrupaciones$

S. Que contengan el cinco y el seis y dos impares.

T. Que los dos centrales sean pares.

Serán:

$ip_1 p_1 p_2 ip_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

$ip_1 p_1 p_2 p_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$p_1 p_2 p_3 ip_1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 24$

$total\ agrupaciones = 72 + 24 + 24 = 120$