COMBINATORIA

Problema 79:

Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}:

A.- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar? Sin y con repetición.

B.- ¿Cuántos de estos son impares? Sin y con repetición.

C.- ¿Cuántos son pares? Sin y con repetición.

D.- ¿Cuántos son divisible por cinco? Sin y con repetición.

E. ¿Cuántos hay mayores que seiscientos? Sin repetición.

Solución Problema 79:

A.- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?

Varía el orden y los elementos por tanto son variaciones.

Sin repetición:

$$V_{10,3} - \frac{1}{10} V_{10,3} = 720 - 72 = 648$$

Con repetición:

$$VR_{10^3} - \frac{1}{10} VR_{10^3} = 100 - 100 = 900$$

B.- ¿Cuántos de estos son impares?

SIN REPETICIÓN: (pares= p; impares= ip)

1ª Posibilidad:

$$p_1 p_2 ip = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$$

En este caso p_1 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8)= 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades porque uno de ello no se puede repetir.

ip puede ser (1, 3, 5, 7, 9) 5 posibilidades.

En total 80 variaciones

2ª Posibilidad:

$pip_1ip_2 = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades porque uno de ello es el impar final= ip_2.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque tiene que terminar en impar.

En total 80 variaciones

3ª Posibilidad:

$ip_1pip_2 = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades porque uno de ello es el impar final= ip_2.

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9)= 5 posibilidades porque tiene que terminar en impar.

En total 100 variaciones

4ª Posibilidad:

$ip_1ip_2ip_3 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades porque uno de ello es el impar final= ip_3.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 3 posibilidades porque no se pueden repetir, y uno de ello es el impar final= ip_3.

En este caso ip_3 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9)= 5 posibilidades porque tiene que terminar en impar.

En total 60 variaciones

Luego, la cantidad total de números impares sin repetición será:

$ip_t = 80 + 80 + 100 + 60 = 320$

CON REPETICIÓN: (pares= p; impares= ip)

1ª Posibilidad:

$p_1 p_2 ip = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

En este caso p_1 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8)= 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

ip puede ser (1, 3, 5, 7, 9) 5 posibilidades.

En total 100 variaciones

2ª Posibilidad:

$pip_1 ip_2 = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque tiene que terminar en impar.

En total 100 variaciones

3ª Posibilidad:

$ip_1 pip_2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir, y tiene que terminar en impar.

En total 125 variaciones

4ª Posibilidad:

$$ip_1 ip_2 ip_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

En este caso ip_3 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir, y tiene que terminar en impar.

En total 125 variaciones

Luego, la cantidad total de números impares con repetición será:

$$ip_{tr} = 100 + 100 + 125 + 125 = 450$$

C.- ¿Cuántos son pares?

Serán la diferencia entre el total y los impares:

Sin repetición:

$$p = 648 - 320 = 328$$

Con repetición:

$$p_r = 900 - 450 = 450$$

D.- ¿Cuántos son divisible por cinco?

Son divisibles por 5 los que terminan en 0 o en 5

SIN REPETICIÓN: (pares= p; impares= ip)

1ª Posibilidad: (empezando por par)

$$p_1 p_2 0 = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$$

En este caso p_1 pueden ser (2, 4, 6 y 8)= 4 posibilidades, el cero está fijo en la última cifra.

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 3 posibilidades porque no se pueden repetir y el 0 está fijo en la última cifra.

El cero es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 12 variaciones</u>

2ª Posibilidad: (empezando por par)

$$p_1 p_2 5 = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$$

En este caso p_1 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras.

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades porque no se puede repetir.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 16 variaciones</u>

3ª Posibilidad: (empezando por par)

$$pip0 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero está fijo en la última cifra.

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9)= 5 posibilidades.

El 0 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 20 variaciones</u>

4ª Posibilidad: (empezando por par)

$$pip5 = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de 3 cifras.

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades porque el 5 es el impar final.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En total sub16 variaciones</u>

1ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ipp0 = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7, 9)= 5 posibilidades.

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades porque el 0 está fijo en la última cifra.

El cero es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 20 variaciones</u>

2ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ipp5 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades, porque el 5 está fijo en la última cifra.

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades porque no se puede repetir.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 16 variaciones</u>

3ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ip_1ip_20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 4 posibilidades porque no pueden repetirse.

El 0 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 20 variaciones</u>

4ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ip_1ip_25 = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 4 posibilidades, el 5 está fijo en la última cifra.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) pero solo 3 posibilidades porque no pueden repetirse, y el 5 es el impar final.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En total sub12 variaciones</u>

<u>Luego, la cantidad total de números divisibles por 5 sin repetición será:</u>

$d_5 = 12 + 16 + 20 + 16 + 20 + 20 + 20 + 12 = 136$

CON REPETICIÓN: (pares= p; impares= ip)

1ª Posibilidad: (empezando por par)

$p_1 p_2 0 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$

En este caso p_1 pueden ser (2, 4, 6 y 8)= 4 posibilidades, el cero está fijo en la última cifra.

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

El cero es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 20 variaciones</u>

2ª Posibilidad: (empezando por par)

$p_1 p_2 5 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$

En este caso p_1 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de tres cifras.

En este caso p_2 pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades porque se puede repetir.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 20 variaciones</u>

3ª Posibilidad: (empezando por par)

$pip0 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero está fijo en la última cifra.

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades.

El 0 es solo 1 posibilidad

En subtotal 20 variaciones

4ª Posibilidad: (empezando por par)

$pip5 = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 4 posibilidades, el cero no forma números de 3 cifras.

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque se pueden repetir.

El 5 es solo 1 posibilidad

En subtotal 20 variaciones

1ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ipp0 = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7, 9) 5 posibilidades.

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

El cero es solo 1 posibilidad

En subtotal 25 variaciones

2ª Posibilidad: (empezando por impar)

$ipp5 = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

En este caso ip pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

En este caso p pueden ser (0, 2, 4, 6 y 8) pero solo 5 posibilidades.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 25 variaciones</u>

3ª Posibilidad: (empezando por impar)

$$ip_1 ip_2 0 = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

En este caso ip_2 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

El 0 es solo 1 posibilidad

<u>En subtotal 25 variaciones</u>

4ª Posibilidad: (empezando por impar)

$$ip_1 ip_2 5 = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$$

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

En este caso ip_1 pueden ser (1, 3, 5, 7 y 9) 5 posibilidades porque pueden repetirse.

El 5 es solo 1 posibilidad

<u>En total sub25 variaciones</u>

<u>Luego, la cantidad total de números divisibles por 5 con repetición será:</u>

$$d_5 = 20 + 20 + 20 + 20 + 25 + 25 + 25 + 25 = 180$$

E. ¿Cuántos hay mayores que seiscientos?

SIN REPETICIÓN:

Habrá 3 cifras: $c_1c_2c_3$

Calculamos cuántos números hay que empiecen por 7, 8 y 9:

$$c_1 c_2 c_3 = 3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$$

La c_1 solo puede ser 7, 8 y 9, es decir 3 posibilidades

La c_2 serán todas menos la empleada en c_1 porque no pueden repetirse, luego: 9 posibilidades

La c_3 serán todas menos la empleada en c_1 y c_2 porque no pueden repetirse, luego: 8 posibilidades

<u>En subtotal 216 variaciones</u>

Ahora calculamos cuántos hay que empiecen por 6:

$$c_1c_2c_3 = 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$$

La c_1 solo ser 6, es decir 1 posibilidades.

La c_2 serán todas menos la cifra 6 empleada en c_1 porque no pueden repetirse, luego: 9 posibilidades.

La c_3 serán todas menos la empleada en c_1 y c_2 porque no pueden repetirse, luego: 8 posibilidades.

<u>Luego, la cantidad total de números mayores de 600 sin repetición será:</u>

$$d_5 = 216 + 72 = 288$$