LOGARITMOS

Problema 75:

Resolver:

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$$

Solución Problema 75:

Sabemos que:

$$4x^2+12x+9$$

Se puede expresar como:

$$4(x+\frac{3}{2})^2 = 4(\frac{2\mathrm{x}+3}{2})^2 = \frac{4(2\mathrm{x}+3)^2}{4} = (2\mathrm{x}+3)^2$$

Sabemos que:

$$6x^2+23x+21$$

Se puede expresar como:

$$6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{3}\right) = 6\left(\frac{2\mathrm{x}+3}{2}\right)\left(\frac{3\mathrm{x}+7}{3}\right) = \frac{6(2\mathrm{x}+3)(3\mathrm{x}+7)}{6} =$$

$$= (2\mathrm{x}+3)(3\mathrm{x}+7)$$

Por tanto,

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$$

$$\log_{3x+7}(2\mathrm{x}+3)^2 + \log_{2x+3}[(2\mathrm{x}+3)(3\mathrm{x}+7)] = 4$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto en el 1er término de la igualdad:

$$\log_{3x+7}(2\mathrm{x}+3)^2 + \log_{2x+3}(2\mathrm{x}+3) + \log_{2x+3}(3\mathrm{x}+7) = 4$$

Sabemos que

$$\log_{2x+3}(2\mathrm{x}+3) = 1$$

Luego:

$$\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2+1+\log_{2x+3}(3\text{x}+7)=4$$

$$\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2+\log_{2x+3}(3\text{x}+7)=4-1$$

$$\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2+\log_{2x+3}(3\text{x}+7)=3$$

Ahora expresamos:

$$\log_{2x+3}(3\text{x}+7)$$

En base 3x+7

$$\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2+\frac{\log_{3x+7}(3x+7)}{\log_{3x+7}(2x+3)}=3$$

Sabemos que

$$\log_{3x+7}(3x+7)=1$$

Luego:

$$\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2+\frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)}=3$$

$$[\log_{3x+7}(2\text{x}+3)^2]\cdot[\log_{3x+7}(2x+3)]+1=3\cdot\log_{3x+7}(2x+3)$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en el 1er término de la igualdad:

$$[2\log_{3x+7}(2x+3)]\cdot[\log_{3x+7}(2x+3)]+1=3\cdot\log_{3x+7}(2x+3)$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\log_{3x+7}(2x+3)=t$$

Obtenemos:

$$[2t]\cdot t+1=3t$$

$$2t^2-3t+1=0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Luego:

$$\log_{3x+7}(2x+3) = t$$

$$\log_{3x+7}(2x+3) = 1$$

Aplicamos la definición de logaritmo: exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.

$$(3x+7) = 2x+3$$

$$3x - 2x = 3 - 7$$

$$x = -4 \quad solución\ no\ válida$$

Para

$$t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\log_{3x+7}(2x+3) = t$$

$$\log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2}$$

Aplicamos la definición de logaritmo: exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.

$$(3x+7)^{1/2} = 2x+3$$

$$\sqrt{3x+7} = 2x+3$$

$$(\sqrt{3x+7})^2 = (2x+3)^2$$

$$3x + 7 = 4x^2 + 9 + 12x$$

$$4x^2 + 12x - 3x + 9 - 7 = 0$$

$$4x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{-9+7}{8} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \ \ solución\ válida$$

$$x_2 = \frac{-9-7}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \ \ solución\ no\ válida$$