LOGARITMOS

Problema 73:

Resolver:

$\log_{\sqrt{3}} x + 4\log_x 27 = 14$

Solución Problema 73:

Hacemos el cambio de base de logaritmo para expresarlos en base 10:

$$\frac{\log x}{\log \sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{\log 27}{\log x} = 14$$

$$\frac{\log x}{\frac{1}{2}\log 3} + \frac{4\log 3^3}{\log x} = 14$$

$$\frac{2\log x}{\log 3} + \frac{3 \cdot 4\log 3}{\log x} = 14$$

$$\frac{2\log x}{\log 3} + \frac{12\log 3}{\log x} = 14$$

$$2(\log x)^2 + 12(\log 3)^2 = 14\log x \log 3$$

$$2(\log x)^2 - 14\log x \log 3 + 12(\log 3)^2 = 0$$

Para mayor facilidad, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\log x = t$$

$$\log 3 = a$$

Así,

$$2t^2 - 14ta + 12a^2 = 0$$

Simplificamos por dos:

$$t^2 - 7ta + 6a^2 = 0$$

$$t = \frac{7\mathrm{a} \pm \sqrt{49a^2 - 24a^2}}{2} = \frac{7\mathrm{a} \pm \sqrt{25a^2}}{2} = \frac{7\mathrm{a} \pm 5\mathrm{a}}{2}$$

$$t_1 = \frac{7\mathrm{a} + 5\mathrm{a}}{2} = \frac{12\mathrm{a}}{2} = 6a\ solución\ válida$$

Luego,

$\log x = t = 6a = 6 \log 3$

$\log x = 6 \log 3$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$\log x = \log 3^6$

$x = 3^6 = 729$

Para

$$t_2 = \frac{7\mathrm{a} - 5\mathrm{a}}{2} = \frac{2\mathrm{a}}{2} = a\ solución\ válida$$

Luego,

$\log x = t = a = \log 3$

$\log x = \log 3$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$x = 3$