LOGARITMOS

Problema 71:

Resolver:

$\log_2 x + 2\log_x 8 = 5$

Solución Problema 71:

Hacemos el cambio de base de logaritmo para expresarlos en base 10:

$$\frac{\log x}{\log 2} + 2 \cdot \frac{\log 8}{\log x} = 5$$

$$\frac{\log x}{\log 2} + 2 \cdot \frac{\log 2^3}{\log x} = 5$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot \log 2}{\log x} = 5$$

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{6\log 2}{\log x} = 5$$

$$(\log x)^2 + 6(\log 2)^2 = 5 \log x \log 2$$

$$(\log x)^2 - 5 \log x \log 2 + 6(\log 2)^2 = 0$$

Para mayor facilidad, hacemos el siguiente cambio de variable:

$\log x = t$

$\log 2 = a$

Así,

$$t^2 - 5ta + 6a^2 = 0$$

$$t = \frac{5\mathrm{a} \pm \sqrt{25a^2 - 24a^2}}{2} = \frac{5\mathrm{a} \pm \sqrt{a^2}}{2} = \frac{5\mathrm{a} \pm \mathrm{a}}{2}$$

$$t_1 = \frac{5\mathrm{a} + \mathrm{a}}{2} = \frac{6\mathrm{a}}{2} = 3a \; solución \; válida$$

Sabemos que:

$\log x = t$

Y como

$t = 3a$

Por tanto,

$\log x = 3a = 3\log 2$

Luego:

$\log x = 3\log 2$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$\log x = \log 2^3$

$x = 2^3 = 8\ solución\ válida$

$$t_2 = \frac{5\mathrm{a} - \mathrm{a}}{2} = \frac{4\mathrm{a}}{2} = 2a\ solución\ válida$$

Sabemos que:

$\log x = t$

Y como

$t = 2a$

Por tanto,

$\log x = 2a = 2\log 2$

Luego:

$\log x = 2\log 2$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$\log x = \log 2^2$

$x = 2^2 = 4 \; solución \; válida$