LOGARITMOS

Problema 70:

Resolver:

$$\log_x(125x)\cdot(\log_{25}x)^2=1$$

Solución Problema 70:

Hacemos el cambio de base de logaritmo para expresarlos en base 10:

$$\left(\frac{\log 125x}{\log x}\right)\cdot\left(\frac{\log x}{\log 25}\right)^2=1$$

Operamos:

$$\left(\frac{\log 125x}{\log x}\right)\cdot\frac{(\log x)^2}{(\log 25)^2}=1$$

$$\frac{\log 125x}{\log x}\cdot\frac{(\log x)^2}{(\log 25)^2}=1$$

$$\log 125x\cdot\frac{\log x}{(\log 25)^2}=1$$

$$\log(5^3x)\cdot\frac{\log x}{[\log(5^2)]^2}=1$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto en el 1er elemento del 1er término de la igualdad:

$$(\log 5^3+logx)\cdot\frac{\log x}{[\log(5^2)]^2}=1$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en la expresión:

$$(3\log 5+logx)\cdot\frac{\log x}{[2\log 5]^2}=1$$

Para mayor facilidad, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\log x=t$$

$$(3\log 5 + t) \cdot \frac{t}{[2\log 5]^2} = 1$$

Operando:

$$\frac{3t \cdot log\, 5 + t^2}{[2\log 5]^2} = 1$$

$$3t \cdot log\, 5 + t^2 = [2\log 5]^2$$

$$t^2 + 3t \cdot log\, 5 - [2\log 5]^2 = 0$$

$$t^2 + 3t \cdot log\, 5 - (2\log 5) \cdot (2\log 5) = 0$$

Para mayor facilidad, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\log 5 = a$$

Luego,

$$t^2 + 3ta - 4a^2 = 0$$

$$t = \frac{-3\mathrm{a} \pm \sqrt{9a^2 + 16a^2}}{2} = \frac{-3\mathrm{a} \pm \sqrt{25a^2}}{2} = \frac{-3\mathrm{a} \pm 5\mathrm{a}}{2}$$

$$t_1 = \frac{-3\mathrm{a} + 5\mathrm{a}}{2} = \frac{2\mathrm{a}}{2} = a\ soluci\acute{o}n\ v\acute{a}lida$$

Sabemos que:

$$t = a$$

$$a = \log 5$$

Luego,

$$t = \log 5$$

Y como

$$\log x = t$$

Por tanto,

$$\log x = \log 5$$

Luego:

$x = 5 \;\; solución\ válida$

$$t_2 = \frac{-3\mathrm{a} - 5\mathrm{a}}{2} = \frac{-8\mathrm{a}}{2} = -4a\ solución\ no\ válida$$