PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 157:

Demostrar que se verifica la siguiente igualdad:

$$(\cos a+\cos b)^2+(\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b)^2=4cos^2\frac{a-b}{2}$$

Solución Problema 157:

$$(\cos a+\cos b)^2+(\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b)^2=(cos^2a+cos^2b+2\cos a\cdot\cos b)+(sen^2a+sen^2b+2sen\ a\cdot sen\ b)=$$

$$=(sen^2a+cos^2a)+(sen^2b+cos^2b)+(2sen\ a\cdot sen\ b)+(2\cos a\cdot\cos b)=1+1+2(sen\ a\cdot sen\ b+\cos a\cdot\cos b)$$

$$2+2(sen\ a\cdot sen\ b+\cos a\cdot\cos b)$$

Sabemos que:

$$sen\ x\cdot sen\ y=\tfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

$$cos\ x\cdot cos\ y=\tfrac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$

Luego,

$$2+2(sen\ a\cdot sen\ b+\cos a\cdot\cos b)=2+2\cdot\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]+2\cdot\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]=$$

$$=2+\cos(a-b)-\cos(a+b)+\cos(a-b)+\cos(a+b)=2+2\cos(a-b)=2[1+\cos(a-b)]$$

Sabemos que:

$$1 + cos\ 2x = 2cos^2x$$

Luego:

$$2[1 + \cos(a - b)] = \ 2 \cdot 2cos^2\frac{a - b}{2} = \ 4cos^2\frac{a - b}{2}$$