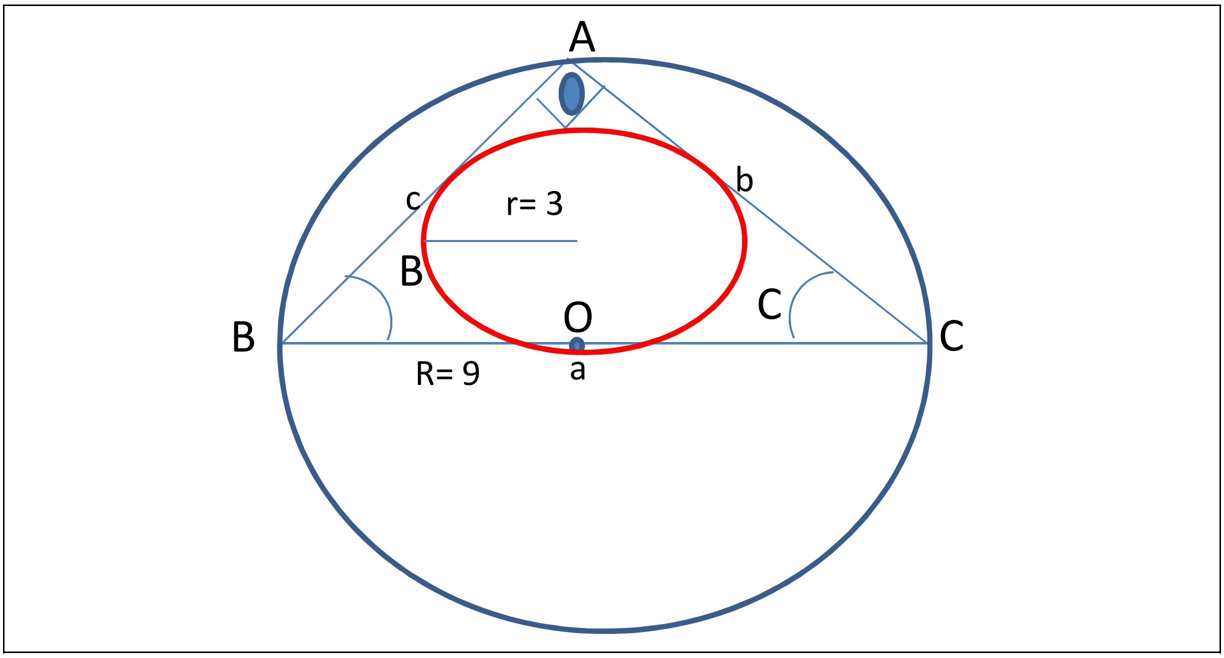
PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problema 144:

Resolver un triángulo rectángulo, conociendo los radios de los círculos inscrito y circunscrito, r=3 m; y R=9 m.

Solución Problema 144:

Hacemos el croquis:



Sabemos que:

Al ser el círculo circunscrito, el diámetro es la hipotenusa del triángulo rectángulo, así:

$$a = 2 \cdot \mathrm{r}$$

$$a = 2 \cdot 9 = 18\ \mathrm{m}$$

Aplicando la siguiente propiedad del círculo inscrito en un triángulo rectángulo que nos relaciona el radio con los catetos e hipotenusa:

$$\mathrm{r} = \frac{b \cdot c}{a + b + c}$$

$$3 = \frac{b \cdot c}{18 + b + c}$$

$3(18+b+c) = b \cdot c$

$54 + 3\mathrm{b} + 3\mathrm{c} = b \cdot c \; ecuación\; 1$

Aplicamos, igualmente, el teorema de Poncelet:

$$\mathrm{r} = \frac{b+c-a}{2}$$

$$3 = \frac{b+c-18}{2}$$

$6 = b + c - 18$

$b + c = 24$

$c = 24 - b \;\; ecuación\; 2$

Sustituyendo el valor de en la ecuación 1:

$54 + 3\mathrm{b} + 3\mathrm{c} = b \cdot c \; ecuación\; 1$

$54 + 3\mathrm{b} + 3(24 - b) \;\; = b \cdot (24 - b \;)$

$54 + 3\mathrm{b} + 72 - 3\mathrm{b} \;\; = 24b - \; b^2$

$b^2 - 24b + 126 = 0$

$$b = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 504}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{24 \pm 8{,}4852}{2}$$

$$b_1 = \frac{24 + 8{,}4852}{2} = 16{,}242\; m$$

$$b_2 = \frac{24 - 8{,}4852}{2} = 7{,}7574\; m$$

Para b= 16,242

Hallamos c:

$c = 24 - b \;\; ecuación\; 2$

$c = 24 - 16{,}242 = \;\; 7{,}758\; m$

Hallamos los ángulos B y C:

$$\text{sen C} = \frac{c}{a} = \frac{7{,}758}{18}$$

$$\text{C} = arc\text{sen}\ \frac{7{,}758}{18} = arc\text{sen}\ 0{,}431 = 25º{,}531 = 25º31´51´´$$

$$\text{B} = 90º - 25º{,}531 = 64º{,}469 = 64º28´8´´$$