

NÚMEROS COMPLEJOS

Problema 8:

Dada la ecuación:

$$(u + vi)^2 = 5 - 12i$$

En la que i representa la unidad imaginaria, hallar los valores reales de u y v .

Solución Problema 8:

$$(u + vi)^2 = 5 - 12i$$

$$u^2 + v^2i^2 + 2uvi = 5 - 12i$$

$$u^2 - v^2 + 2uvi = 5 - 12i$$

Agrupando parte real y parte imaginaria:

$$u^2 - v^2 = 5 \text{ (ecuación 1)}$$

$$2uv = -12 \text{ (ecuación 2)}$$

De la ecuación 2 obtenemos:

$$uv = -6$$

$$u = \frac{-6}{v}$$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$$\left(\frac{-6}{v}\right)^2 - v^2 = 5$$

$$\frac{36}{v^2} - v^2 = 5$$

Operando:

$$36 - v^4 = 5v^2$$

$$v^4 + 5v^2 - 36 = 0 \text{ (ecuación 3)}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$v^2 = t$$

$$v^4 = t^2$$

Así, la ecuación 3 queda:

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Para $t = 4$,

$$v^2 = t$$

$$v^2 = 4$$

$$v = \sqrt{4} = \pm 2$$

Como:

$$u = \frac{-6}{v} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$u = \frac{-6}{v} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Para $t = -9$,

$$v^2 = t$$

$$v^2 = -9$$

$$v = \sqrt{-9} = \pm 3i$$

No es válido porque piden los valores reales

Al pedir los valores reales de u y v , son:

$$v = \pm 2$$

$$u = \pm 3$$