

NÚMEROS COMPLEJOS

Problema 6:

Hallar el valor que hay que dar a x para que el cociente:

$$\frac{3 + xi}{2 - i}$$

Sea: 1º Real; 2º Imaginario; 3º De módulo igual a:

$$\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Solución Problema 6:

1º

$$\frac{3 + xi}{2 - i}$$

Sea real:

$$\frac{3 + xi}{2 - i} = a$$

$$(3 + xi) = a(2 - i)$$

$$3 + xi = 2a - ai$$

Agrupando partes reales:

$$3 = 2a$$

$$a = \frac{3}{2}$$

Agrupando partes imaginarias:

$$x = -a$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

2º:

$$\frac{3 + xi}{2 - i}$$

Sea imaginario:

$$\frac{3 + xi}{2 - i} = bi$$

$$3 + xi = bi(2 - i)$$

$$3 + xi = 2bi - bi^2$$

$$3 + xi = 2bi - b \cdot (-1)$$

$$3 + xi = 2bi + b$$

Agrupando partes reales:

$$b = 3$$

Agrupando partes imaginarias:

$$x = 2b$$

$$x = 2 \cdot 3 = 6$$

3º De módulo igual a:

$$\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{3 + xi}{2 - i} &= \frac{(3 + xi)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 2xi + 3i - x}{4 - 2i + 2i - i^2} = \frac{6 - x + i(2x + 3)}{4 - (-1)} \\ &= \frac{6 - x + i(2x + 3)}{5} = \frac{6 - x}{5} + \frac{i(2x + 3)}{5} \end{aligned}$$

Aplicando la definición de módulo de un número complejo:

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{6 - x}{5} + \frac{i(2x + 3)}{5}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{6 - x}{5}\right)^2 + \left(\frac{2x + 3}{5}\right)^2$$

$$\frac{45}{25} = \frac{(6 - x)^2}{25} + \frac{(2x + 3)^2}{25}$$

$$45 = (6 - x)^2 + (2x + 3)^2$$

$$45 = 36 + x^2 - 12x + 4x^2 + 9 + 12x$$

$$45 = 45 + 5x^2$$

$$5x^2 = 45 - 45$$

$$\mathbf{x = 0}$$