

NÚMEROS COMPLEJOS

Problema 11:

Hallar la suma:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{53}$$

Solución Problema 11:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{53}$$

Puede expresarse como:

$$1 + i + i \cdot i + i^2 \cdot i + i^3 \cdot i + \dots + i^{52} \cdot i + i^{53}$$

Luego, es una progresión geométrica, cuya razón es:

$$r = \frac{i^2}{i} = i$$

Sabemos que la fórmula de la suma de una progresión geométrica de términos finitos es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Así:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{i^{53} \cdot i - 1}{i - 1} = \frac{i^{54} - 1}{i - 1} = \frac{i^{13 \cdot 4} \cdot i^2 - 1}{i - 1} = \frac{i^2 - 1}{i - 1} = \frac{(\sqrt{-1})^2 - 1}{i - 1} = \\ &= \frac{-1 - 1}{i - 1} = \frac{-2}{i - 1} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{-2}{i - 1}$$